VEKTORVÄRDA FUNKTIONER AV EN VARIABEL

$\mathbb{R}^n$-situation: $\bar{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$

alt. $\bar{f} : I \to \mathbb{R}^n$

I intervall, $I \subset \mathbb{R}$.

Funktionens värde i en punkt t — $\bar{f}(t)$ — ska vara en vektor.

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)).$$

Vi har n st vanliga funktioner $f_1(t), f_2(t), \ldots, f_n(t)$ helt enkelt!

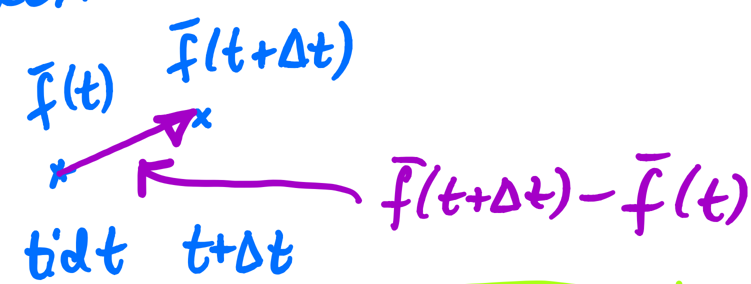
Vad är poängen?

Värdena blir punkter i $\mathbb{R}^n$, som flyttar sig när vi varierar t. Vad kan vi tänka att det beskriver? $\boxed{\text{Partikelrörelse}}$ t=tid

Om vi tänker oss detta som en partikels rörelse, vilka storheter skulle vi vilja beskriva?

* Hastighet (Velocity)
* Fart (speed)
* Acceleration
* Partikelbanan

Hastigheten innehåller mer information än farten, den säger också i vilken riktning rörelsen sker.



Hastighet: $\boxed{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\bar{f}(t+\Delta t)-\bar{f}(t)}{\Delta t}}$ m/s

Momentan hastighet vid just den här tiden t. Ser ut som $\bar{f}'(t)$-definitionen om $\bar{f}$ var skalärvärd.

$$\boxed{g'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{g(t+h) - g(t)}{h}}$$

skalär: reella tal.

Vi skriver

$$\bar{f}'(t) = \lim_{h \to 0} \frac{\bar{f}(t+h) - \bar{f}(t)}{h}.$$

Obs! Inga svårighet att dela med h.

Men rent konkret då?

$$\bar{f} = (f_1, \dots, f_n)$$

$$\bar{f}(t+h) = (f_1(t+h), \dots, f_n(t+h))$$

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_n(t))$$

$$\bar{f}(t+h) - \bar{f}(t) = (f_1(t+h) - f_1(t), \dots, f_n(t+h) - f_n(t))$$

$$\frac{\bar{f}(t+h) - \bar{f}(t)}{h} = \left(\frac{f_1(t+h) - f_1(t)}{h}, \dots, \frac{f_n(t+h) - f_n(t)}{h}\right)$$

$\xrightarrow[\text{då } h \to 0]{} \left(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\right).$

Så: $\bar{f}'(t) = \left(f_1'(t), \ldots, f_n'(t)\right)$

Hastigheten vid partikelrörelse blir helt enkelt $\boxed{\bar{f}'(t).} = \bar{v}(t)$

Farten: $\boxed{|\bar{f}'(t)|}$ (längden på vektorn)

Acceleration: $\bar{f}''(t) = \bar{v}'(t)$

$$\bar{f}''(t) = \left(f_1''(t), \ldots, f_n''(t)\right)$$

Partikelbana = den kurva som rörelsen bildar.

$\mathbb{R}^2$ (planet)

Banan blir en delmängd i $\mathbb{R}^n$.
Vilken ytterligare information finns det i partikelrörelsen?

Saknas i banan: kunskap om när man befann sig på en viss plats.

Partikelrörelse: $\begin{cases} ① \text{ Partikelbanan} \\ ② \text{ Genomlöpningshastighet} \end{cases}$

Ofta räcker det att lägga till till ① begynnelsepunkt + slutpunkt + fart längs banan.

Har att göra med: möjliga parametriseringar av kurvor.

Idé: att beskriva en kurva genom att ange ett sätt att genomlöpa den.

Kommentar: $|\bar{f}'(t)| = \sqrt{(f_1'(t))^2 + \ldots + (f_n'(t))^2}$

är farten.

KURVA = (PARTIKEL)BANA

PARTIKELRÖRELSEN

innehåller mer information.

KURVOR OCH GLATTHET.

Vi börjar med: funktioners glatthet.

$g(t)$, vanlig reellvärd funktion.

g är C^k-glatt om:
$$\begin{cases} ① & g \in C \text{ (betyder att } g \text{ är kont.)} \\ ② & g' \in C \\ \vdots & \\ (k{+}1) & g^{(k)} \in C \end{cases}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots$

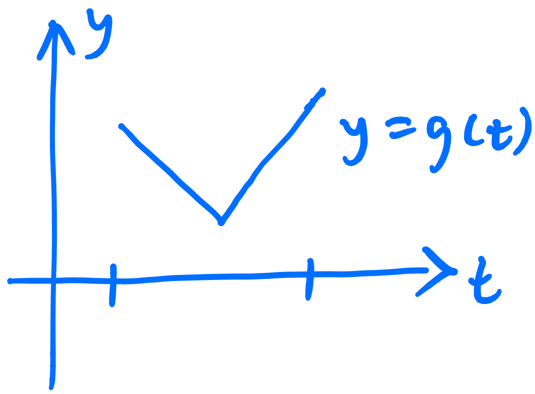
(slät)

glatt = smooth

$C^0 = C$

$y = g(t)$, $t \in I$ (grafen)

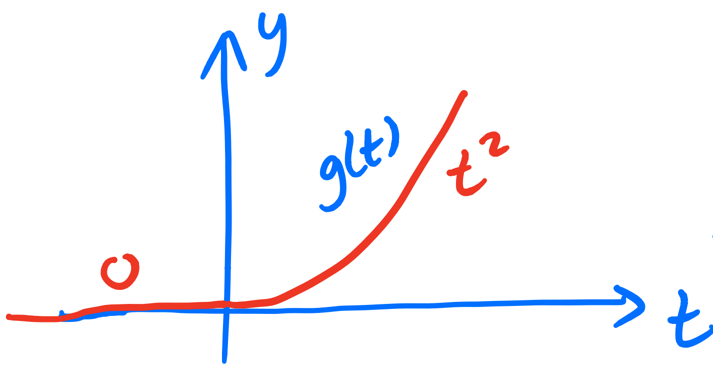
C = continuous



hur glatt?

$g \in C$ sant

$g \in C^1$ falskt



$g \in C^1$ sant

$g \in C^2$ falskt.

DEF. $\bar{f}(t)$ är C^k-glatt om dess komponenter alla är C^k-glatta.

$$\bar{f}(t) = (f_1(t), \ldots, f_n(t))$$

Villkoret blir att alla $f_1, \ldots, f_n$ ska vara C^k-glatta.

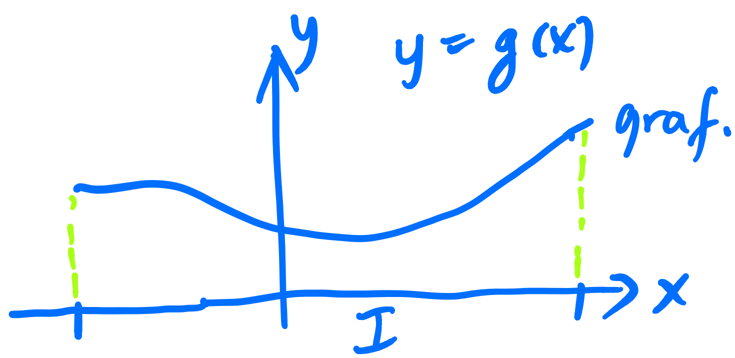
Glatthet av kurvor, givna med parametriseringar.

$\bar{f}(t)$, $t \in I$ genomlöper en bana (= kurva)

glatthet hos kurvan?

Kan vi få fram det ur $\bar{f}$:s glatthet?

Obs! När det gäller parametriseringar av kurvor finns det tankefällor. Lätt att tänka i termer av grafer som ni är vana vid.



parametrisera grafkurvan!

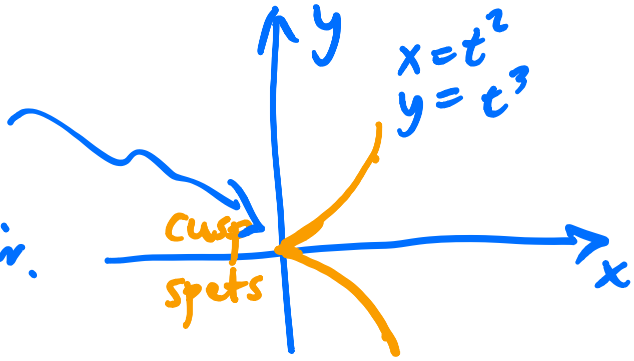
$$\boxed{\bar{f}(t) = (t, g(t)), \quad t \in I.}$$ SVAR

IDÉ: En kurva är C^k-glatt om det finns en parametrisering av den $\bar{f}(t)$ där alla komponenter är C^k-glatta (dvs $\bar{f} \in C^k$).

Ex. $\mathbb{R}^2$. $\bar{f}(t) = (t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$.

Hur ser banan ut?

Problemet är att $\bar{f}'(0) = \bar{0}$ här.



MODIFIKATION av IDÉn:

Kurvan är C^k-glatt om den har en parametrisering $\bar{f}(t)$ med C^k-glatta komponenter och dessutom $\underbrace{\|\bar{f}'(t)\| > 0}_{\text{positiv fart.}}$ överallt.

Ex. $\mathbb{R}^3$. $\bar{f}(t) = (t, t^2, t^3)$. Ange hastighet och acceleration i punkten $(1,1,1)$.

Lösn. $\bar{f}'(t) = (1, 2t, 3t^2) = \bar{v}(t)$.

$\bar{a}(t) = \bar{f}''(t) = (0, 2, 6t)$.

Punkten $(1,1,1)$: vid vilket t?

$$\begin{cases} t = 1 \\ t^2 = 1 \\ t^3 = 1 \end{cases} \qquad t = 1 \text{ helt enkelt.}$$

Stoppa in $t=1$: $\bar{f}'(1) = \bar{v}(1) = (1,2,3)$

$\bar{a}(1) = \bar{f}''(1) = (0,2,6)$.

<u>Ex.</u> Betrakta linjen som är skärningen av de två planen $y = 2x-4$ och $z = 3x+1$. Parametrisera linjestycket som går från $(2,0,7)$ till $(3,2,10)$.

$\mathbb{R}^3$

Lösn. Rät linje från $(2,0,7)$ till $(3,2,10)$.

$\bar{r} = (x,y,z)$

$\bar{r}(t) = \bar{r}^0 + t\bar{u}$ $\quad$ $\bar{u}$ ger riktning

$t \in \mathbb{R}$. $\quad$ $\bar{r}^0$ begynnelsepunkt

t.ex. $\bar{u} = (3,2,10) - (2,0,7) = (1,2,3)$.

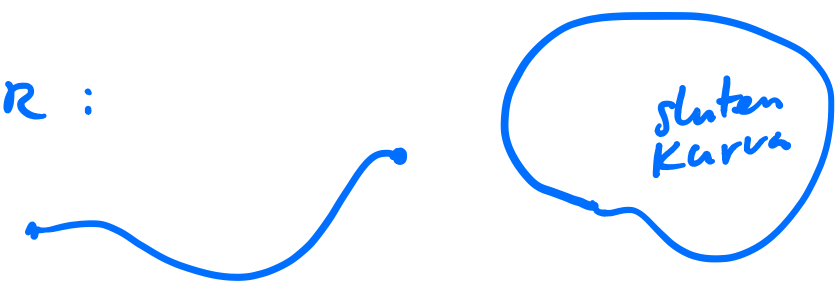
$\bar{r}^0 = (2,0,7)$.

$\bar{r}(t) = \bar{r}^0 + t\bar{u} = (2,0,7) + t(1,2,3)$

$= (2+t, 2t, 7+3t)$

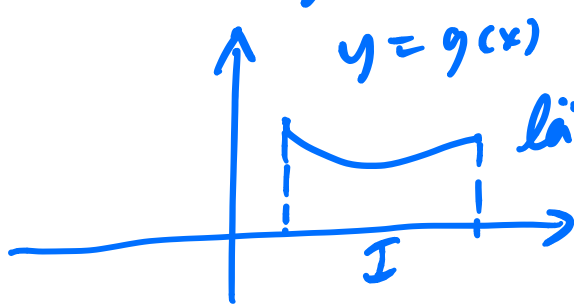
där $0 \le t \le 1$

Kurvor :



Kurvlängd : $\int_I |\bar{r}'(t)|\, dt$ ger längden.

Generalisering av graf-fallet



längden = $\int_I \sqrt{1+(g'(x))^2}\, dx$

(fås som specialfall av formeln för parametriseringar).