Recap från igår först:

Båglängd. $\bar{f}(t)$ parametriserad kurva

$\bar{f}: I \to \mathbb{R}^n$

farten $|\bar{f}'(t)|$

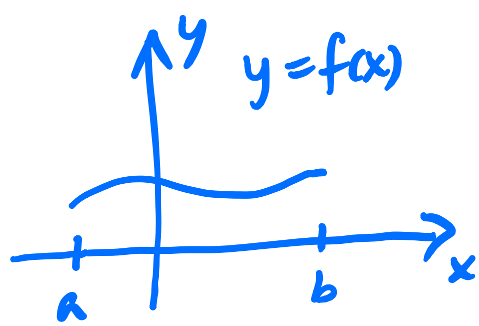
Hur långt åker man från t till $t+dt$?

$|\bar{f}'(t)|\,dt = ds$ båglängdselementet

Lägg ihop: $\int_I |\bar{f}'(t)|\,dt$ = Längden på kurvan.

Spec. fall: $n=2$ planet.

grafkurva



Hur lösa med parametrisering?

Välj t så att $t = x$.

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(x) = f(t) \end{cases} \qquad (x,y) = (t, f(t)) = \bar{r}(t)$$

Notera: i 2 och 3 dim används ofta $\bar{r}$ som ortsvektor $\bar{r} = (x, y, z)$.

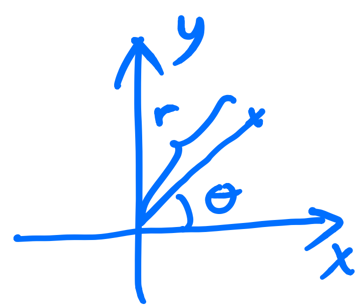
$$|\bar{r}'(t)|\, dt = ds$$

$$\bar{r}(t) = (t, f(t)) \Rightarrow \bar{r}'(t) = (1, f'(t))$$

$$ds = \|\bar{r}'(t)\|\, dt = \sqrt{1^2 + (f'(t))^2}\, dt$$

$$\text{Båglängden} = \int_{\text{kurvan}} ds = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt$$

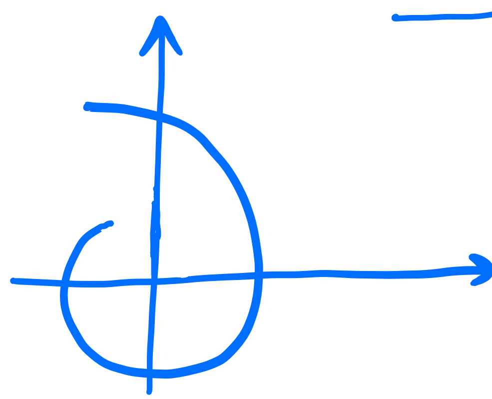
Men om kurvan skulle ges på polär form, vad blir då ds?



(r, θ) polära koordinater

$r = g(\theta)$

typ spiral.



$ds = ?$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = g(\theta)\cos\theta \\ y = g(\theta)\sin\theta \end{cases}$$

θ blir parameter!

$\bar{r}'(\theta) = ?$ $\quad \bar{r} = (x, y) = (g(\theta)\cos\theta, g(\theta)\sin\theta)$.

$$\bar{r}'(\theta) = (g'(\theta)\cos\theta - g(\theta)\sin\theta,\ g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta)$$

$|\bar{r}'(\theta)| = [\,\cdots$ förenklingar av $\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\,]$

$$= \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}$$

$$ds = \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}\, d\theta \qquad \boxed{\alpha \le \theta \le \beta}$$

$$\int_\alpha^\beta \sqrt{(g(\theta))^2 + (g'(\theta))^2}\, d\theta = \text{båglängden.}$$

FUNKTIONER AV FLERA VARIABLER.

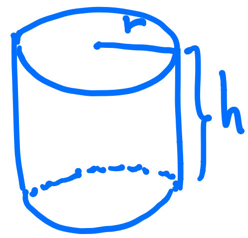
När träffar vi på funktioner av flera variabler? $\quad f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x_1, \ldots, x_n)$. $\qquad (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Ex. $n=3$, vanliga rummet.

$T(x,y,z)$ temperatur i punkten (x,y,z).

Ex. Konservburk



Volym = ?

Area = ?

Volym = bottenarea × höjd =

$= \pi r^2 h$

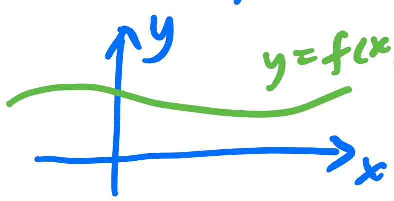
Area $= \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r \cdot h = 2\pi r(r+h)$.

Intressanta problem : optimera burken!

Både arean och volymen blir funktioner av r och h samtidigt.

Vad brukar vi göra när vi har en funktion av en variabel, säg $f(x)$?

Vi introducerar grafen $y=f(x)$ och ritar.

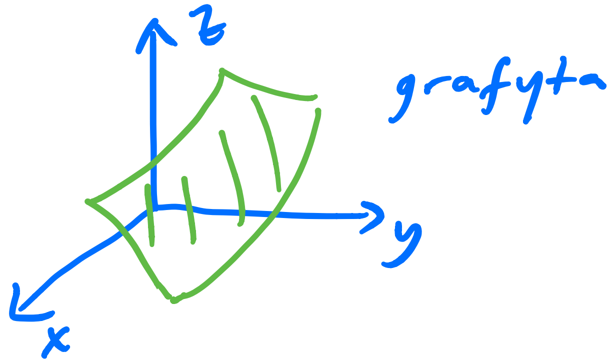


Hur kan vi göra om vi har flera variabler?

T. ex. 2st, kalla dem (x, y). $\boxed{f(x,y)}$

Hur kan vi rita grafen?

$\boxed{z = f(x,y)}$ grafen.



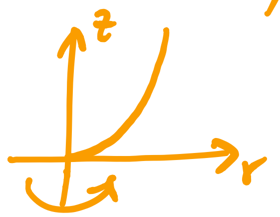
Obs att med datorgrafik kan man få en god bild av sådana grafer.

Ex. Rita grafen till

(a) $f(x,y)=x^2+y^2$.

(b) $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Lösn. (a) $r^2=x^2+y^2$, $f(x,y)=r^2$ parabel.

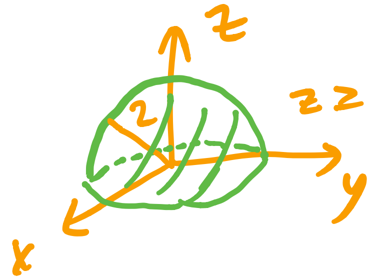


rotera runt z-axeln

(b) $z = \sqrt{4-x^2-y^2} \Rightarrow z^2 = 4-x^2-y^2$

$x^2+y^2+z^2=4$ sfär centrum $(0,0,0)$
radie $\sqrt{4}=2$.

en del av sfären



$z \geq 0$ (kvadratroten)

TOPOGRAFISKA METODER

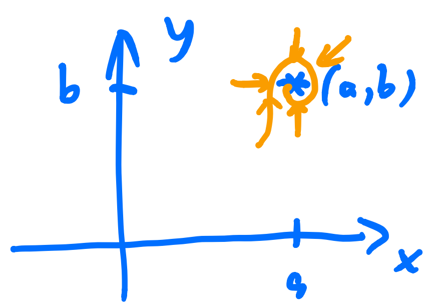
Man ritar de s.k. nivåkurvorna
$f(x,y)=C$.

GRÄNSVÄRDEN I FLERA VARIABLER

$f(x,y)$ Vad ska det betyda att
$(x,y) \longrightarrow (a,b)$?

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = ?$$

Vi skulle kunna $y \to b$ först (x fixerad),
därefter låta $x \to a$.
Alternativt: Låt $x \to a$ först (y fix),
sedan låt $y \to b$.
Kanske blir olika?
Kanske finns andra sätt?



Kom ihåg från 1 variabel:

$\lim_{x\to a} g(x) = L$ betyder :

"Om x är nära a så ska $g(x)$ vara nära L"

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :$$
$$0 < |x-a| < \delta \Longrightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

$\forall$, $\exists$ kvantorer

$\Longrightarrow$ "medför att"

$\forall$ = "för varje"

$\exists$ = "det finns"

Två variabler : $0 < \underbrace{|(x,y) - (a,b)|}_{|(x-a,\, y-b)| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}} < \delta$

precis som förut!

"$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0$:

$0 < |(x,y) - (a,b)| < \delta \Longrightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$"

är vad $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$

betyder.

Ex. (a) $\lim_{(x,y)\to(2,3)} \frac{x^2}{y^3} = \frac{2^2}{3^3} = \frac{4}{27}$

Klurigare:

(b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2} = ?$ $\left[\frac{0}{0}\right]$

Byt till polära koordinater:

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $(x,y)\to(0,0)$ betyder att $\begin{cases} r\to 0 \\ \theta \text{ fritt} \end{cases}$

$$\frac{xy}{\underbrace{x^2+y^2}_{r^2}} = \frac{r\cos\theta\, r\sin\theta}{r^2} = \frac{\cancel{r^2}^{\,1}\cos\theta\sin\theta}{\cancel{r^2}_{\,1}} =$$

$= \cos\theta\sin\theta$ beror ju på vinkeln θ

Vi får inget gränsvärde.

(c) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = ?$

polära igen!

$$\frac{(r\cos\theta)^2 r\sin\theta}{r^2} = \frac{r^{2+1}\cos^2\theta\sin\theta}{r^2} =$$

$= r\cos^2\theta\sin\theta \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ lite klurigare än så! $\theta = \theta(r)$ tillåts!

$$-r \le r\underbrace{\cos^2\theta\sin\theta}_{\text{mellan } -1 \text{ och } 1} \le r$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$0 \qquad\qquad 0 \qquad\qquad 0$$

instängningsregeln!

Det följer att

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2} = 0.$$

(d) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\overbrace{\sin(xy)}^{\approx xy}}{x^2+y^2} = ?$$

$\sin t \approx t$ om $t \approx 0$

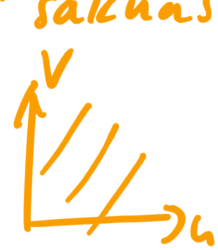
likvar(b) gränsvärde saknas.

(e) $$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^4+y^4} = ?$$

Inför $\begin{cases} u = x^2 \\ v = y^2 \end{cases}$ $\quad \dfrac{x^2y^2}{x^4+y^4} = \dfrac{uv}{u^2+v^2}$ samma som i(b)

$(u,v)\to(0,0)$ gränsvärde saknas.

$\left.\begin{matrix} u \ge 0 \\ v \ge 0 \end{matrix}\right\}$ enda begränsningarna.



(f) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = ?$

variabelbyte $u = y^2$:

$$\frac{x^2y^2}{x^2+y^4} = \frac{x^2u}{x^2+u^2} \longrightarrow 0 \text{ då } (x,u)\to(0,0)$$

Observera att om $(x,y)\to(0,0)$ så följer att $(x,u)\to(0,0)$.

KONTINUITET

Vi säger att $f(x,y)$ är kontinuerlig i (a,b) om:

(i) $f(a,b)$ finns

(ii) $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ finns

(iii) $\displaystyle f(a,b) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

Samma i 3 och fler variabler!