IDAG:

$\begin{cases} \text{Riktningsderivata} \\ \text{Gradient} \end{cases}$

Från tidigare:

Linjär approximationen av en funktion $f(x,y)$ kring en punkt (a,b):

$$\boxed{f(a+h,b+k) = f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) + \text{"litet fel"}}$$

Vid differentierbarhet kräver vi att

"litet fel" $= o\big(|(h,k)|\big)$, då $(h,k) \to (0,0)$

Från tidigare såg vi att

$$h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = (h,k)\cdot\nabla f(a,b)$$

där $\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right)$

är en vektor. Den kallas **gradienten**.

Ex. (gradientberäkning)

$$f(x,y) = x^2 + 2y^2 + 4xy$$

Vad blir gradienten i $(1,1)$?

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\boxed{f(1,1) = 1+2+4 = 7}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 0 + 4y \text{ ger } \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2+4 = 6$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 4y + 4x \text{ ger } \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 4+4 = 8$$

$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) \right) = (6,8).$$

Hur blir alltså linjärapproximationen i $(1,1)$?

$$f(1+h, 1+k) = f(1,1) + (h,k)\cdot \nabla f(1,1) + \text{fel}$$

$$= 7 + (h,k)\cdot(6,8) + \text{fel} =$$

$$= 7 + 6h + 8k + \text{fel}.$$

Jämför med direkt kalkyl:

$$f(1+h, 1+k) = (1+h)^2 + 2(1+k)^2 + 4(1+h)(1+k)$$

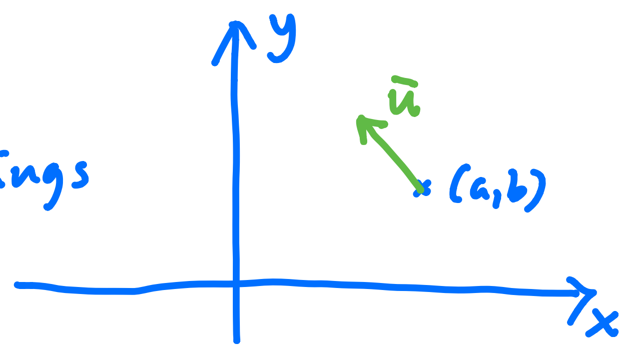
$$= \underline{1} + \underline{2h} + h^2 + 2(\underline{1} + \underline{2k} + k^2)$$
$$+ 4(\underline{1} + \underline{h} + \underline{k} + hk) =$$
$$= 7 + 6h + 8k + \underbrace{h^2 + 2k^2 + 4hk}_{\text{"felet"}}$$

Riktningsderivata

$\frac{\partial f}{\partial x}$ och $\frac{\partial f}{\partial y}$ beskriver förändringen av f om vi stegar i x eller y-riktningen.

Andra riktningar då?

Välj riktningsvektor $\bar{u} = (u_1, u_2)$ av längd 1.



Förändringen längs med $\bar{u}$:

$$\boxed{\lim_{\tau\to 0} \frac{f((a,b)+\tau\bar{u}) - f(a,b)}{\tau} = D_{\bar{u}} f(a,b)}$$

Om $\begin{cases} \bar{u} = (1,0) \text{ får vi } \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) \\ \bar{u} = (0,1) \text{ får vi } \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \end{cases}$

En enkel formel för $D_{\bar{u}} f(a,b)$:

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) \approx h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b).$$

$$(a,b) + \tau\bar{u} = (a,b) + \tau(u_1, u_2) =$$

$$= (a + \underbrace{\tau u_1}_{h}, b + \underbrace{\tau u_2}_{k})$$

$$f(a+\tau u_1, b+\tau u_2) - f(a,b) \approx \tau u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + \tau u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Dela med τ :

$$\frac{f(a+\tau u_1, b+\tau u_2) - f(a,b)}{\tau} \approx u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

Låt $\tau \to 0$:

$$D_{\bar{u}} f(a,b) = \lim_{\tau \to 0} \frac{f(a+\tau u_1, b+\tau u_2) - f(a,b)}{\tau}$$

$$= u_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + u_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$$

$$= (u_1, u_2) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right)$$

$$= \bar{u} \cdot \nabla f(a,b).$$

$$\boxed{D_{\bar{u}} f(a,b) = \bar{u} \cdot \nabla f(a,b)}$$

Viktigt: $\bar{u}$ riktn. vektor $|\bar{u}| = 1$.

FRÅGOR: I vilken riktning växer eller avtar funktionen mest? Finns det en neutral riktning?

Notera att: $\bar{u}\cdot\bar{v} = |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|\cos\theta$

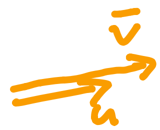
om θ är vinkeln mellan $\bar{u}$ och $\bar{v}$.

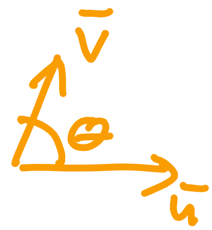
$$-1 \le \cos\theta \le 1 \Rightarrow$$

$$-|\bar{u}|\cdot|\bar{v}| \le \bar{u}\cdot\bar{v} \le |\bar{u}|\cdot|\bar{v}|$$

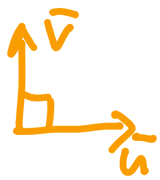
$\cos\theta = -1$ dvs $\theta = \pi$

$\cos\theta = 1$ dvs $\theta = 0$





Neutrala fallet: $\bar{u}\cdot\bar{v} = 0$ om $\theta = \frac{\pi}{2}$ vinkelräta



Vad ger detta oss?

$|\bar{u}| = 1$ riktningsvektor

$$-|\bar{v}| \le \bar{u}\cdot\bar{v} \le |\bar{v}|$$

Tillämpa på $\bar{v} = \nabla f(a,b)$:

$$-|\nabla f(a,b)| \le \bar{u}\cdot\nabla f(a,b) \le |\nabla f(a,b)|$$

när? när?

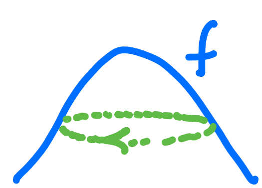
$\bar{u} \cdot \nabla f(a,b) = |\nabla f(a,b)|$ om $\bar{u}$ och $\nabla f(a,b)$ pekar åt samma håll.

$\bar{u} \cdot \nabla f(a,b) = -|\nabla f(a,b)|$ om $\bar{u}$ och $\nabla f(a,b)$ pekar åt motsatt håll.

SVAR: Vi ska traska i gradientens riktning för maximal växt.
I motsatt riktning för max avtagande.
$|\nabla f(a,b)|$ = maximala riktn. derivatan

$\nabla f(a,b)$ innehåller alltså mycket information: riktningen för maximal växt, samt hur stor den max växten blir!

Hur blir det om vi tittar på en kurva som ges av att $f(x,y) = C$?
Kurvan blir alltid $\perp$ mot gradienten.



Nivåkurvan $f(x,y)=C$ är alltid vinkelrät mot gradienten $\nabla f = \text{grad} f$.

<u>Ex.</u> $f(x,y)=(x^2-y^2)e^{x^2+y^2}$.

Studera funktionens beteende kring $(x,y)=(1,0)$ avseende max växt/avtagande.

Lösn.
$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x\,e^{x^2+y^2}+(x^2-y^2)\,e^{x^2+y^2}\cdot 2x \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2y\,e^{x^2+y^2}+(x^2-y^2)\,e^{x^2+y^2}\cdot 2y \end{cases}$$

Stoppa in $(x,y)=(1,0)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2\cdot 1\, e^{1^2+0^2}+(1^2-0^2)e^{1^2+0^2}\cdot 2\cdot 1 = 4e \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0) = -2\cdot 0\cdot e^{1^2+0^2}+(1^2-0^2)e^{1^2+0^2}\cdot 2\cdot 0 = 0. \end{cases}$$

ger att $\nabla f(1,0)=(4e,0)$.

maximal växtriktning? Samma som gradientens: $\dfrac{(4e,0)}{|(4e,0)|}=(1,0)$.

maximal avtaganderiktning ?

Motsatt gradientens, dvs $(-1,0)$

Max riktningsderivata $|\nabla f(1,0)| = 4e$

Min riktningsderivata $-|\nabla f(1,0)| = -4e$

Ex: Betrakta $f(x,y) = e^x \cos y$.
I punkten $(x,y) = (1, \frac{\pi}{2})$, beräkna riktningen för maximalt avtagande samt en tangentriktning för nivåkurvan genom punkten. Hur mycket avtar funktionen i dessa riktningar?

Lösn. $\nabla f = ?$ $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \cos y$

$\frac{\partial f}{\partial y} = -e^x \sin y$

$$\nabla f = (e^x \cos y, -e^x \sin y)$$

$$\nabla f(1, \tfrac{\pi}{2}) = (e^1 \underbrace{\cos \tfrac{\pi}{2}}_{=0}, -e^1 \underbrace{\sin \tfrac{\pi}{2}}_{=1}) =$$

$$= (0, -e)$$

Riktning för max avtagande:

$$-\frac{\nabla f(1,\frac{\pi}{2})}{|\nabla f(1,\frac{\pi}{2})|} = -\frac{(0,-e)}{|(0,-e)|} = (0,1).$$

Hur snabbt 6 är avtagandet?

$$-|\nabla f(1,\tfrac{\pi}{2})| = -|(0,-e)| = -e$$

Nivåkurvan då? Riktning?

$$f(1,\tfrac{\pi}{2}) = e^x \cos y \Big|_{\substack{x=1 \\ y=\frac{\pi}{2}}} = 0.$$

Nivåkurvan ges av ekv

$$e^x \cos y = 0.$$

Riktningen är vinkelrät mot gradienten.

Gradienten är ju $(0,-e)$

Vinkelrät mot denna, t.ex. $(1,0)$.

Nästa föreläsning:

implicita funktioner samt

implicit derivering.

implicit ⟷ explicit

underförstedd — uttryckelig

$ye^y = x^3$ — $y = e^x$

$y = ?$ — $y' = e^x$

$y' = ?$

Räkna vidare på $ye^y = x^3$. Hur beräkna y'? $y = y(x)$ stoppa in i

$$y(x)e^{y(x)} = x^3$$

Derivera $\frac{d}{dx}$: $y'(x)e^{y(x)} + y(x)e^{y(x)}y'(x) = 3x^2$.

$$y'(x)\left[e^{y(x)} + y(x)e^{y(x)}\right] = 3x^2$$

$$y'(x) = \frac{3x^2}{e^{y(x)} + y(x)e^{y(x)}}.$$

Kommer att utveckla nästa gång!