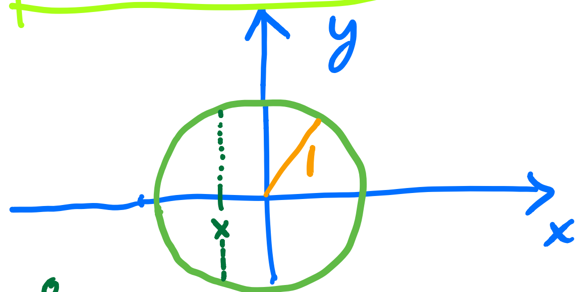
IMPLICITA FUNKTIONER
IMPLICIT DERIVERING

Enhetscirkeln : $\boxed{x^2+y^2=1}$ IMPLICIT FORM

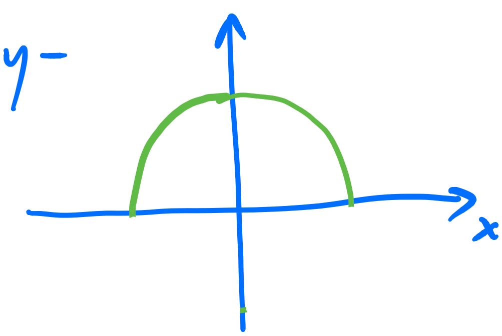
Kan vi tänka på $y=y(x)$?



PROBLEM: Finns två y-värden till ett x-värde!

Välj ett av dessa y-värden :

vi väljer det positiva y-värdet.



$$x^2+y^2=1$$

$$y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$$

positiva valet : $\boxed{y=\sqrt{1-x^2}}$ EXPLICIT FORM

Vi söker $y'(x)$. Använd den explicita formen: $y' = \left[\sqrt{1-x^2}\right]' = \left[(1-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]' =$

$$= \frac{1}{2}(1-x^2)^{\frac{1}{2}-1} \cdot (-2x) =$$

$$= -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Skulle vi kunna använda den implicita formeln istället?

$$x^2+y^2=1$$

$y=y(x)$: $\quad x^2+(y(x))^2=1$

derivera m a p x:

$$2x + 2y(x)\cdot y'(x) = 0$$

$$y(x)\, y'(x) = -x$$

$$\boxed{y'(x) = -\frac{x}{y(x)}.} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Lite enklare (när man vant sig):

$$x^2+y^2=1$$

Applicera d på bägge sidor:

$$d(x^2)+d(y^2)=d1=0$$

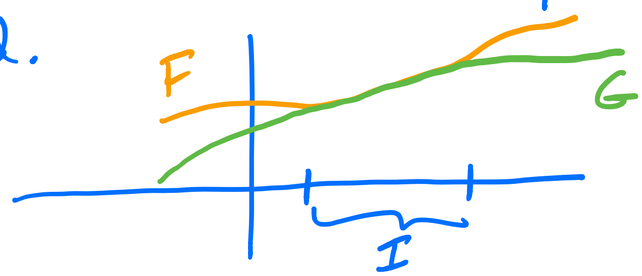
$$\cancelto{1}{2}x\,dx+\cancelto{1}{2}y\,dy=0$$

$$\frac{y\,dy}{y}=-\frac{x\,dx}{y}$$

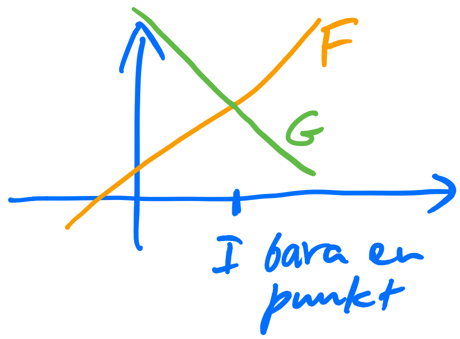
$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}\frac{dx}{dx}=-\frac{x}{y}$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

<u>OBS</u>: Om $F(x)=G(x)$ på I så följer att $F'(x)=G'(x)$ på I om I är ett intervall med positiv bredd.



intervall utan bredd:



Det allmänna fallet med ekvationer i två variabler.

Enhetscirkeln $x^2+y^2=1$ kan skrivas som $\underbrace{x^2+y^2-1}_{\text{ex på } F(x,y)}=0.$

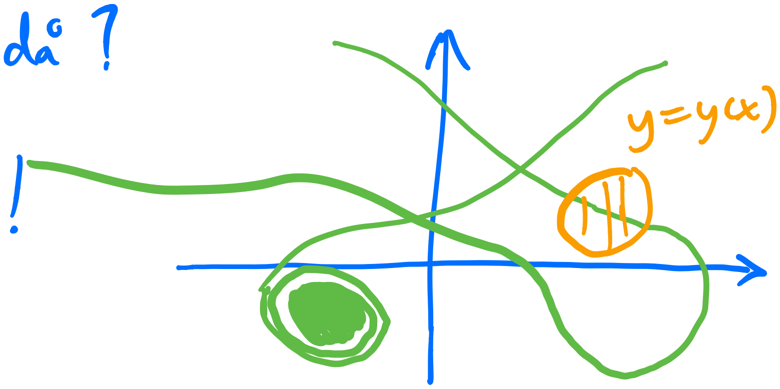
Vi tittar nu på en allmän ekvation

$$\boxed{F(x,y)=0}.$$

kan beskriva en kurva men det kan bli värre.

Hur blir det då?

Räkna ut $y'(x)$!



Gissar att $y = y(x)$ existerar

Gör som vi gjorde förut med cirkeln.

$$F(x, y(x)) = 0.$$

Derivera m a p på bägge sidor.

Tillämpa kedjeregeln!

$$\frac{d}{dx}\left[F(x, y(x))\right] = \boxed{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0}$$

Jfr: $\boxed{dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy.}$

$$\frac{dF}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad y'$$

Vi får nu ekvationen

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y(x)) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y(x)) \cdot y'(x) = 0$$

$$\frac{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}^{\,1}\; y'(x)}{\cancel{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x))}_{\,1}} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y(x))}{\partial F/\partial y\,(x,y(x))}$$

$$\boxed{y'(x) = -\frac{\partial F/\partial x\,(x,y(x))}{\partial F/\partial y\,(x,y(x))}}$$

Viktigt: Vi får inte dela med noll.
Vi måste kräva att $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y(x)) \neq 0$.

Heuristisk slutsats: Kurvan måste vara vettig (deriverbar) om $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ och F är tillräckligt snäll (C^1-klass).

Strax: implicita funktionssatsen som säger att detta är sant!

SATS (implicita funktionssatsen)

Antag följande om $F(x,y)$:

(i) F är C^1-glatt i två variabler

(ii) (a,b) är en punkt där $F(a,b)$ är def, samt $\partial_x F(a,b)$ och $\partial_y F(a,b)$ finns.

(iii) $F(a,b)=0$ samt att $\partial_y F(a,b) \neq 0$.

Slutsats: Ekvationen $F(x,y)=0$ definierar en C^1-glatt funktion $y=y(x)$ med egenskapen $y(a)=b$. Därtill får vi derivatan $y'(x)$ ur formeln :

$$\boxed{y'(x) = -\frac{(\partial F/\partial x)(x,y(x))}{(\partial F/\partial y)(x,y(x))}}.$$

$$\begin{cases} F(x,y)=0 \\ F \ C^1\text{-glatt} \end{cases}$$

Teoretiskt intresserade: titta på beviset av satsen.

Fler variabler ? (x,y,z) t.ex.

$F(x,y,z)=0$.

Ex. Sfären $x^2+y^2+z^2=1 \Leftrightarrow$

$$\underbrace{x^2+y^2+z^2-1}_{F(x,y,z)}=0$$

Mest naturligt att lösa ut z ur x och y.

$$z^2 = 1-x^2-y^2$$

$$z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{välj } \oplus$$

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{övre hemisfären}$$

z'_x, z'_y sökes!

$$\begin{cases} z'_x = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{x}{z} \\ z'_y = \frac{1}{2}(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}-1}\cdot(-2y) = -\frac{y}{\sqrt{1-x^2-y^2}} = -\frac{y}{z}. \end{cases}$$

Men om vi skulle tänka implicit istället?

Gå till allmänna fallet!

$$F(x,y,z)=0. \qquad z=z(x,y)$$

$$\boxed{F(x,y,z(x,y))=0}$$

Derivera partiellt m a p x :

$$\frac{\partial}{\partial x}\underbrace{\left[F(x,y,z(x,y))\right]}_{\text{kedjeregeln}} = 0$$

$$(*)\quad dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial z}dz$$

$F=0$ ger $dF = d0 = 0$.

$$dF = \underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy}\ + \frac{\partial F}{\partial z}dz = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}dz = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

Vi tänker på x och y som oberoende variabler medan z beror på x och y.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(F(x,y,z(x,y))\right) = \frac{\partial F}{\partial x} + 0 + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

i $(*)$ håll y konst dvs $dy=0$ och dela med dx

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$ dela med $\frac{\partial F}{\partial z}$:

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}}$$ krav: $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$

$\frac{\partial z}{\partial y} = ?$ Samma typ av kalkyl ger

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}}$$ krav: $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$.

Ännu svårare:

4 variabler, 2 ekv.

(x, y, u, v) $\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$

varje ekv reducerar dim med 1

$4 - 1 - 1 = 2$ dim

$u(x,y)$, $v(x,y)$, x, y huvudkoord.

Alt. t.ex. $\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$

$$\boxed{\begin{matrix} u'_x, & u'_y, & v'_x, & v'_y \\ x'_u, & x'_v, & y'_u, & y'_v \end{matrix}}$$

$$\left.\begin{matrix} F=0 \\ G=0 \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} dF=0 \\ dG=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = 0 \\ dG = \frac{\partial G}{\partial x}dx + \frac{\partial G}{\partial y}dy + \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial u}du + \frac{\partial F}{\partial v}dv = -\frac{\partial F}{\partial x}dx - \frac{\partial F}{\partial y}dy \\ \frac{\partial G}{\partial u}du + \frac{\partial G}{\partial v}dv = -\frac{\partial G}{\partial x}dx - \frac{\partial G}{\partial y}dy \end{cases}$$

på matrisform:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

detta leder till att vi kan lösa ut $\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$ att $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$ ur ekv.

$$(1)\quad \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

alt.

$$(2)\quad \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial u} & \frac{\partial F}{\partial v} \\ \frac{\partial G}{\partial u} & \frac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}$$

$u'_x = ?\quad u'_y = ?\quad\Big|\quad x'_u = ?\quad x'_v = ?$

$v'_x = ?\quad v'_y = ?\quad\Big|\quad y'_u = ?\quad y'_v = ?$

Hur läser vi av dessa samband ur (1) och (2)?

Vi vet ju att $\begin{cases} du = \boxed{u'_x}\,dx + \boxed{u'_y}\,dy \\ dv = \boxed{v'_x}\,dx + \boxed{v'_y}\,dy \end{cases}$

Om vi kommer fram till att

$du = \boxed{A}\,dx + \boxed{B}\,dy$

$dv = \boxed{C}\,dx + \boxed{D}\,dy$

$$\boxed{u'_x = A\ ,\ u'_y = B,\ v'_x = C,\ v'_y = D.}$$

Analogt för x'_u, x'_v, y'_u, y'_v !