VARIABELBYTEN

Vi tittade på ekv. system

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) = 0 \\ G(x,y,u,v) = 0 \end{cases}$$

Vi kunde tänka på lösn. i termer

av
$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases}$$

alternativt

$$u = u(x,y)$$
$$v = v(x,y)$$

Hur ser variabelbytet ut på lokal nivå?

Blir linjär transformation lokalt ges av A

$$(1)\quad \boxed{\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}}\,, \quad A \text{ en } 2\times 2\text{-matris.}$$

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$ matris som beror på (u, v).

Observera att (1) ger att

$$\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

då måste vi ha sambandet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}$$ beror på (x, y)

Då har vi alltså

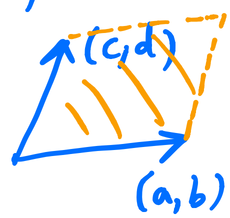
$$\underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}}_{A^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A och A^{-1} kallas för Jakobimatriser.

Speciellt viktigt: det A.

Vad har determinanten för tolkning?

Skalfaktor



Motsvarande effekt i flera dimensioner.

$$\det\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \text{arean med tecken}$$

Vi inför beteckningen

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix}$$

Vi får att $$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \underbrace{du\,dv}_{\text{areaelement}} = \overbrace{dx\,dy}^{\text{areaelement}}$$

Av ovanstående vet vi att

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}$$

dxdy arean

Av speciellt intresse:

Polära koordinater.

$(x,y) \rightsquigarrow (r,\theta)$

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = ?$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin\theta \\ \frac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta \end{cases}$$

Stoppa in

$$= \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\theta \cdot r\cos\theta - (-r\sin\theta)\cdot\sin\theta =$$

$$= r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

Vi ser att

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = r \geq 0.$$

$$dxdy = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| drd\theta = \underbrace{r\,drd\theta}_{\text{areaelementet uttryckt i polära koord.}}.$$

NYTT MATERIAL:

TAYLORS FORMEL I TVÅ VARIABLER.

Maclaurin (Taylor med $a=0$) i 1 var:

f funktion, tillräckligt glatt

$f(x) \approx f(0)$ om $\boxed{x \approx 0}$

$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ linjärapprox.

$\vdots$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m$$

felet uttrycks i termer av en restterm $R_m(x)$:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(m)}(0)}{m!}x^m + R_m(x)$$

En form som är populär :

$$R_m(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} f^{(m+1)}(\theta x)$$

där $\theta = \theta_x$ med $0 < \theta < 1$.

Två variabler då?

$(x, y) \approx (0, 0)$

$f(x, y) \approx f(0,0)$ första approx.

$$f(x,y) \underset{\text{Linjärapprox.}}{\approx} \underbrace{f(0,0)}_{0\text{ grad}} + \underbrace{x f_x'(0,0) + y f_y'(0,0)}_{1\text{ grad}}$$

$$f(x,y) \approx f(0,0) + x f_x'(0,0) + y f_y'(0,0) +$$

$$+ \underbrace{\frac{f_{xx}''(0,0)}{0!\,2!}x^2 + \frac{f_{yy}''(0,0)}{2!\,0!}y^2 + \frac{f_{xy}''(0,0)}{1!\,1!}xy}_{\text{grad } 2}$$

Det här kan förbättra på naturligt vis.

Tredjegradstermen blir

$f^{(3)}_{x^3}$

$$\frac{f'''_{xxx}(0,0)}{3!\,0!}x^3 + \frac{f'''_{xxy}(0,0)}{2!\,1!}x^2y + \frac{f'''_{xyy}(0,0)}{1!\,2!}xy^2$$

$$+ \frac{f'''_{yyy}(0,0)}{0!\,3!}y^3$$

homogent polynom av grad 3.

Man fortsätter:

$$f(x,y) = f(0,0) + f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y$$

$$+ \dots + \frac{f^{(m)}_{x^m}(0,0)}{m!\,0!}x^m + \frac{f^{(m)}_{x^{m-1}y}(0,0)}{(m-1)!\,1!}x^{m-1}y$$

$$+ \dots + \frac{f^{(m)}_{y^m}(0,0)}{0!\,m!}y^m + R_m(x,y)$$

Ofta är den exakta formeln för $R_m(x,y)$ inte betydelsefull. T.ex. vid gränsvärden vill vi bara veta storleksordningen, t.ex. att $|R_m(x,y)| \le C \cdot (x^2+y^2)^{\frac{m+1}{2}}$ nära $(0,0)$.

Detta gäller om f är av C^{m+1}-glatthetsklass.

Hur blir det om vi byter origo mot en annan punkt?

$$f(x,y), \quad (x,y) \approx (a,b)$$

$$\text{dvs} \begin{cases} x \approx a \\ y \approx b \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a+h \\ y = b+k \end{cases} \qquad \begin{cases} h \approx 0 \\ k \approx 0 \end{cases}$$

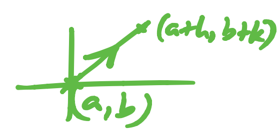
$f(a+h, b+k) = g(h,k)$ kan vi utveckla som ovan.

När vi är klara kan vi välja att byta tillbaka till (x,y) igen [från (h,k)].

Hur får vi egentligen fram Taylors formel i flera variabler? Finns ett sätt att reducera tillbaka till envariabelsformeln!

Hitta på funktionen $F(t) = f(a+th, b+tk)$.

Använd envariabels Taylor på F!



$$F(t) = F(0) + F'(0)t + \ldots + \frac{F^{(m)}(0)}{m!}t^m + R_m(t)$$

Hur räknar vi ut $F(0), F'(0), \ldots$?

$F(0) = f(a,b).$

$$R_m(t) = \frac{F^{(m+1)}(\theta t)}{(m+1)!}t^{m+1}, \quad \text{för något } \theta = \theta_x, \; 0 < \theta < 1.$$

tänk: rikt. derivata

$$F'(0) = \frac{d}{dt}\left[f(a+th, b+tk)\right]\Big|_{t=0} =$$

kedjeregeln i 2 var.

$$= f'_x(a+th, b+tk)\cdot h + f'_y(a+th, b+tk)\cdot k\Big|_{t=0}$$

$$= f'_x(a,b)\,h + f'_y(a,b)\,k = (h,k)\cdot\nabla f(a,b)$$

där $\nabla f = (f'_x, f'_y)$ är gradienten.

$$\boxed{\left(\frac{d}{dt}F\right)(0) = \left[(h,k)\cdot\nabla\right] f(a,b).}$$

Här är

$$(h,k)\cdot\nabla = h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}$$

diff-op.

tänk på h, k som fixerade tal bara.

Mer allmänt:

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^j F(0) = \left((h,k)\cdot\nabla\right)^j f(a,b)$$

$$\left((h,k)\cdot\nabla\right)^2 = \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 =$$

$$= h^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2hk\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + k^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \text{ t.ex.}$$

Man får alltså fram flervariabelsformeln ur envariabelsformeln!

Ex. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^3}$ utv. i Taylor-polynom av grad 2 kring $(1,2)$.

Approximera därefter $\sqrt{1.02^2+1.97^3}$.

Lösn. $$f(1+h, 2+k) = \overbrace{f(1,2)}^{=3} + hf'_x(1,2)$$

$h \approx 0$, $k \approx 0$

$$+ kf'_y(1,2) + \frac{h^2}{2}f''_{xx}(1,2)$$

$$+ \frac{k^2}{2}f''_{yy}(1,2) + hkf''_{xy}(1,2)$$

$$+ R_2(h,k)$$

Räkna ut $f'_x, f'_y, f''_{xx}, f''_{yy}, f''_{xy}$ och stoppa in $(1,2)$.

Vid slutliga approx av $\sqrt{1.02^2+1.97^3}$ använder vi $h=0.02$, $k=-0.03$.

Svar: $f(1+h, 2+k) \approx 3 + \frac{h}{3} + 2k + \frac{4}{27}h^2 - \frac{2}{9}hk + \frac{k^2}{3}$.

Taylorutveckling vid implicit givna funktioner.

$\sin(0+0) \stackrel{?}{=} 0\cdot 0 + 2\cdot 0$ OK

Ex. Ekvationen $\sin(x+y) = xy + 2x$.

$$\begin{cases} y = y(x) \\ \boxed{y(0)=0} \end{cases}$$

Taylorutveckling kring $x=0$ upp till grad 3.

$$y = \underbrace{y(0)}_{=0} + y'(0)x + \frac{y''(0)}{2}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + R_3(x)$$

Skriv $y = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + R_3(x)$ ansats eftersom vi inte känner koefficienterna.

$$\boxed{\sin(x+y) = xy + 2x}$$

$$x + y = x + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + R_3(x) =$$

$$= (a_1 + 1)x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + R_3(x)$$

$$xy + 2x = a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \underbrace{x R_3(x)}_{\text{felterm } O(x^5)}$$
$$+ 2x$$

$$\sin t \approx t + O(t^2) \qquad t \approx 0.$$

$$\sin(x+y) \approx x + y + O(x^2 + y^2)$$

$$= (a_1 + 1)x + \underbrace{O(x^2 + y^2)}_{O(x^2)} = xy + 2x$$
$$= 2x + O(x^2)$$

$$a_1 + 1 = 2$$

$$\boxed{a_1 = 1}$$

Noggrannare Taylor för $\sin t$, t.ex.

$\sin t = t - \frac{t^3}{6} + O(t^5)$ ger fler koeff.

$$\sin(x+y) = \sin\left(2x + a_2x^2 + a_3x^3 + O(x^4)\right)$$

$$= 2x + a_2x^2 + a_3x^3 - \frac{(\qquad)^3}{6} + O(x^4)$$

vissa uttryck blir av högre grad och dessa stoppas in i resttermen.

Gör färdigt hemma!

Observation: Ofta kan det vara enklare att utveckla m.h.a. någon envariabelformel istället för att använda flervariabelformeln.

$$\sin(\underbrace{x+y}_{t}) = \overbrace{x+y}^{t} - \frac{(\overbrace{x+y}^{t})^3}{3!} + \dots$$

utveckla algebraiskt.