IDAG:

Extremvärdesproblem,

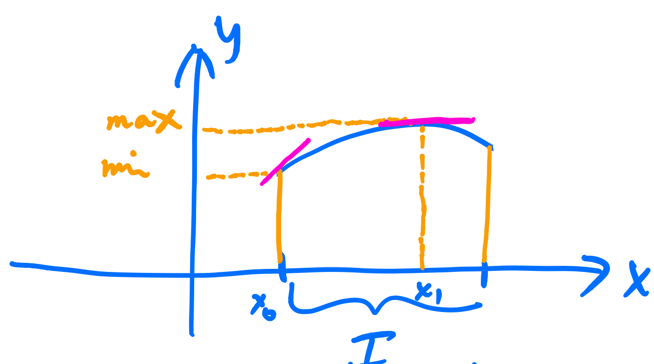
även med bivillkor.

Extremvärden = "leta efter max och min" (var det antas)

1var $\max_{x \in I} f(x)$ $\quad \min_{x \in I} f(x)$ $\quad I$ intervall

2var $\max_{(x,y) \in D} f(x,y)$ $\quad \min_{(x,y) \in D} f(x,y)$.

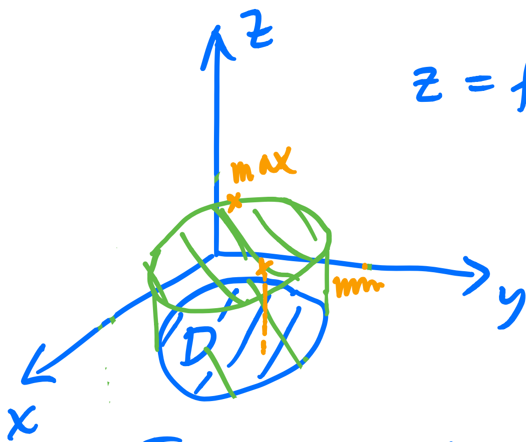
Illustration 1var



$f'(x_1) = 0$

$f'(x_0) = 0$ måste inte gälla då x_0 är en ändpunkt.

Vad kan hända i 2 var?



$z = f(x,y)$

Två olika situationer:

Om extremvärde antas inuti så bör väl motsv. till $f' = 0$ gälla, dvs $\nabla f = \bar{0}$.

Alternativt randpunkt, och vad gör vi då?

Antag: $\max f(x,y)$ antas i en inre punkt (a,b).

$$f(a+h, b+k) \approx f(a,b) + (h,k)\cdot \nabla f(a,b)$$

$h \approx 0$
$k \approx 0$ linj approx.

Om $\nabla f(a,b)$ inte är $= \bar{0}$,

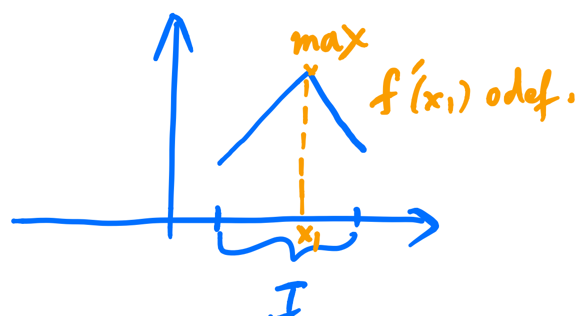
då kan vi välja en pytteliten vektor (h,k) så att $(h,k)\cdot\nabla f(a,b) > 0$ och i så fall blir värdet större

$f(a+h, b+k) > f(a,b)$.

$\therefore$ inte något max.

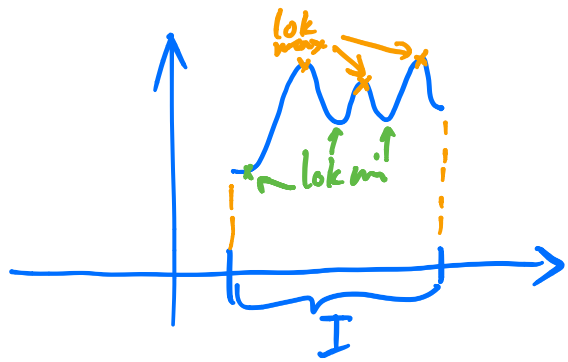
Randpunkter : Då måste inte $\nabla f = \bar{0}$ vid extrempunkt.

OBS! I inre punkter kan vi ha singulärt beteende vid extremvärden förstås.



Motsvarande förstås även i flera variabler.

Lokala extrempunkter



Villkor vid lokalt max i en punkt:

$$f(x) \leq f(a) \quad \text{om } x \text{ är nära } a.$$

Lokalt min på samma n's:

$$f(x) \geq f(a) \quad \text{om } x \text{ är nära } a.$$

Motsvarande i flera variabler?

Lok max: $f(x,y) \leq f(a,b)$ om (x,y) är nära (a,b).

Lok min: $f(x,y) \geq f(a,b)$ om (x,y) är nära (a,b).

Vi minns från 1 var att om f är C^2-glatt så har vi kriterier för lok max och min.

Obs: punkter där $f'(x) = 0$ kallas för

kritiska punkter. (stationära punkter)

Motsv. i flera variabler: $\nabla f = \bar{0}$ ger kritiska punkter.

Lokal extrempunkt är en kritisk punkt om funktionen är C^1-glatt.

Villkor för lokal extrempunkt:

$f'(a) = 0$ kritisk punkt & $f''(a) > 0 \Rightarrow$ lokalt mi

– " – $f''(a) < 0 \Rightarrow$ lok max.

Åt andra hållet? C^2-glatthet

lok mi $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$ kritisk punkt & $f''(a) \geq 0$

lok max $\Longrightarrow$ $f'(a) = 0$ kritisk punkt & $f''(a) \leq 0$.

Vad är rätt begrepp som motsv. f'' i flera variabler?

$f' \rightsquigarrow \nabla f$ i flera var. vektor

$f'' \rightsquigarrow H_f$ Hessianen matris

2var. $$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} \\ f''_{yx} & f''_{yy} \end{pmatrix}$$

Eftersom $f''_{yx} = f''_{xy}$ gäller så är H_f en symmetrisk matris.

$H_f > 0$? $H_f \geq 0$?

Positivt definit

Positivt semidefinit

$H_f < 0$
neg. definit

$H_f \leq 0$
negativt semidefinit

Indefinit: varken ≥ 0 eller ≤ 0.

Villkor: H_f har egenvärden λ_1, λ_2, reella tal.
(följer av att H_f är symmetrisk).

Positivt definit $\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 > 0 \\ \lambda_2 > 0 \end{cases}$

Positivt semidefinit $\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \geq 0 \\ \lambda_2 \geq 0 \end{cases}$

Negativt definit $\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 < 0 \\ \lambda_2 < 0 \end{cases}$

Negativt semidefinit $\Longleftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 \leq 0 \\ \lambda_2 \leq 0. \end{cases}$

Indefinit $\Longleftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 < 0$. (ett positivt och ett negativt)

Lok max vid k.p. $\Longrightarrow H_f \leq 0$

Lok min vid k.p. $\Longrightarrow H_f \geq 0$.

k.p. & $H_f < 0 \Rightarrow$ lok max

k.p. & $H_f > 0 \Rightarrow$ lok min.

Grafisk tolkning: $H_f > 0$ vid k.p.

skål

$H_f < 0$ analogt.

H_f indefinit

sadelpunkt

<u>Ex</u>. $f(x,y,z) = x^2y + y^2z + z^2 - 2x$

polynom. Klassificera de kritiska punkterna!

Kritiska punkter: Lös $\nabla f = 0$

$$\nabla f = (f'_x, f'_y, f'_z) = (2xy-2,\ x^2+2yz,\ y^2+2z) = \bar{0}$$

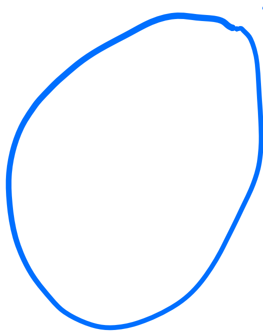
$$\begin{cases} 2xy-2 = 0 \\ x^2+2yz = 0 \\ y^2+2z = 0 \end{cases} \qquad (x,y,z) = (1, 1, -\tfrac{1}{2})$$

$$H_f = \begin{pmatrix} f''_{xx} & f''_{xy} & f''_{xz} \\ f''_{yx} & f''_{yy} & f''_{yz} \\ f''_{zx} & f''_{zy} & f''_{zz} \end{pmatrix} \text{ i } (\overset{x}{1}, \overset{y}{1}, \overset{z}{-\tfrac{1}{2}})$$

$$= [\text{i punkten}] = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \text{ indefinit}$$

$\therefore$ sadelpunkt !

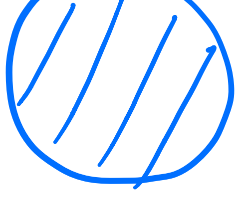
Men randen då? Tidigare bara inre punkter!



randen beskrivs ofta av en ekvation.

$\begin{matrix}\max\\ \min\end{matrix}$ xy givet att $\boxed{x^2+y^2 \le 1.}$

bivillkor.



inre punkter samt rand. Randen $x^2+y^2=1$.

$\max_{\min} \; xy$ givet $\boxed{x^2+y^2=1.}$
bivillkor.

Allmänt i 2var:

(∗) $\max_{\min} f(x,y)$ givet $\boxed{g(x,y)=0}$

Lagrange-multiplikator-metoden

För att lösa (∗) gör vi så här: vi tillverkar en ny funktion

$L(x,y,z,\lambda)$ $f(x,y,z)$ $\lambda\, g(x,y,z)$ 3 var

$$\boxed{L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\, g(x,y).}$$

Vi ska leta efter kritiska punkter till L!

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases}$$

Hitta sådana punkter (x_0, y_0, λ_0). Då blir (x_0, y_0) en kandidatpunkt.

Testa värdet $f(x_0,y_0)$, jämför med de andra lösn. (k.p. till L).

OBS! Bivillkoret skriver vi på formen $g(x,y)=0$. Se på $L'_\lambda = 0$:

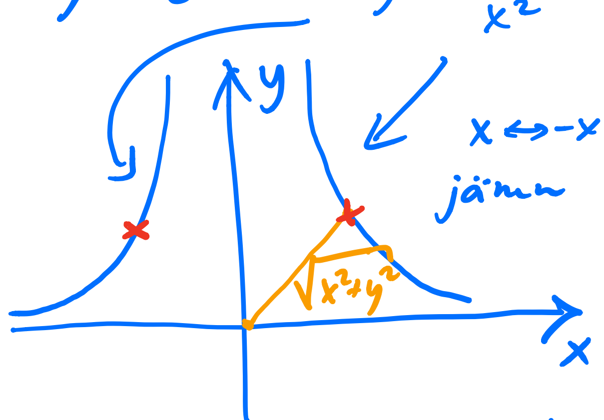
$$L'_\lambda = g(x,y) \overset{\text{vill}}{\underset{\text{vi}}{=}} 0.$$

Kommentar: λ kallas för Lagrange-multiplikator.

Ex. Finn det kortaste avståndet mellan origo och kurvan $x^2y=16$. $\quad y=\frac{16}{x^2}$

Lösn.

$$\min \sqrt{x^2+y^2} \text{ givet } x^2y=16 = \sqrt{\min x^2+y^2 \text{ givet } x^2y=16}$$



$x>0$ kan antas motsv. symm. punkt.

$\min x^2+y^2$
givet $x^2y=16$

Lagrange-metoden:

$$L(x,y,\lambda) = x^2 + y^2 + \lambda(x^2y - 16)$$

$$\begin{cases} L'_x = 2x + 2\lambda xy \overset{\text{vill}}{\underset{\text{vi}}{=}} 0 \\ L'_y = 2y + \lambda x^2 \overset{\text{vill}}{\underset{\text{vi}}{=}} 0 \\ L'_\lambda = x^2y - 16 = 0 \end{cases}$$

$\underbrace{2x(1+\lambda y)}_{\downarrow} = 0$

$\cancel{x=0}$ eller $1+\lambda y = 0$

omöjligt $x^2y = 16$ ju

Vi finner efter lite kämpande med ekv-lösn.

att $$\begin{cases} x = \pm 16^{1/3} \\ y = 16^{2/3} \\ \lambda = -16^{-1/3} \end{cases}$$

Kandidatpunkter $(x,y) = \begin{cases} (16^{1/3}, 16^{2/3}) \\ (-16^{1/3}, 16^{2/3}) \end{cases}$

Avståndet blir $\sqrt{x^2+y^2} = \sqrt{(16^{1/3})^2 + (16^{2/3})^2} =$

$$= \sqrt{16^{2/3} + 16^{4/3}} = \sqrt{16^{2/3}(1+16^{2/3})} =$$

$$= \sqrt{16^{2/3}}\sqrt{1+16^{2/3}} = 16^{1/3}\sqrt{1+16^{2/3}}.$$

$$\left(16^{2/3}\right)^2 = 16^{\frac{2}{3}\cdot 2} = 16^{4/3} \text{ ja.}$$

Två bivillkor, hur blir det då då?

$$\max_{\min} \; f(x,y,z) \text{ givet } \begin{cases} g(x,y,z) = 0 \\ h(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Vi behöver 2st Lagrange-multiplikatorer!

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z) + \mu h(x,y,z).$$

Kritiska punkter till $L(x,y,z,\lambda,\mu)$ sökes!

<u>Ex.</u> Finn $\max_{\min} \; xy + 2z$ givet $\begin{cases} x+y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2=24. \end{cases}$

Lösn. Bilda

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = xy + 2z + \lambda(x+y+z) + \mu(x^2+y^2+z^2-24)$$

Leta kritiska punkter!

$$L'_x = y + \lambda + 2\mu x \overset{\text{vill}}{\underset{\text{vi}}{=}} 0$$

$$L'_y = x + \lambda + 2\mu y \overset{\text{vill}}{\underset{\text{vi}}{=}} 0$$

$$L'_z = 2 + \lambda + 2\mu z \overset{\text{vill}}{\underset{\text{vi}}{=}} 0$$

$$\left.\begin{aligned} L'_\lambda &= x + y + z = 0 \\ L'_\mu &= x^2 + y^2 + z^2 - 24 = 0 \end{aligned}\right\} \text{bivillkoren}$$

jobba lite för att få fram de k.p. och därefter jämföra funktionsvärdena.