Institutionen för matematik
**KTH**
Håkan Hedenmalm

## Omtentamen i Komplex analys, SF1628, den 21 december 2016

Skrivtid 08.00-13.00. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar.

För del **A** gäller betygsreglerna från kurshemsidan. Det behövs minst 14 poäng för betyg E. 12-13 poäng ger betyg FX, med rätt till komplettering. Bonuspoäng tillgodoräknas enligt kurshemsidan: KS1 motsvarar uppgift 1, och KS2 motsvarar uppgift 2. Inlupparna motsvarar uppgifterna 3 och 4.

Del **B** skall göras för studenter som önskar betygen A, B, och C. Observera betyg C även kan uppnås genom bra resultat på del A. För detaljer, se kurshemsidan.

Lycka till!

# Del A.

**1.** Använd definitionen av funktionerna $\sin z$ och $\cos z$ för att visa att trigonometriska ettan

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

gäller för alla komplexa $z$.

**2.** Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 9}$$

i Laurentserie i "ringområdet" $0 < |z + 3i| < 6$.

**3.** Hur många nollställen har polynomet

$$f(z) = z^4 - z^3 + z^2 - z + 5$$

i cirkelskivan $|z| < 1$?

**4.** Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{2 - \sin x}$$

med hjälp av residukalkyl.

**5.** Finn en Möbiusavbildning som avbildar halvplanet $\mathrm{Re}\, z > 1$ på cirkelskivan $|z| < 1$.

# Del B.

**6.** Betrakta integralen

$$I(a) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x+ia)^2} dx,$$

där $a$ är ett reellt tal. Visa att $I(a)$ inte beror på $a$, så att $I(a) = I(0)$, där man av vissa skäl råkar veta att $I(0) = \sqrt{\pi}$. Tips: Betrakta $I(a)$ som en integral av $e^{-z^2}$ längs med en horisontell linje.

**7.** Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

**8.** Antag att $f(z)$ är en hel funktion (dvs analytisk i hela planet), och att funktionen uppfyller olikheten

$$|f(z)| \leq |z|^{1/2}$$

överallt. Visa att i så fall måste vi ha att $f(z) = 0$ för alla $z$.

**9.** Formulera och bevisa maximumprincipen för analytiska funktioner.