Institutionen för matematik
KTH
Michael Benedicks

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 30 oktober 2014

Skrivtid 14.00-19.00. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. Minst 21 poäng på A-delen ger betyg C och rätt att betygsättas på B-delen. För betyg C räknas inlämningsuppgifter och datorlab högst som 10p och motsvarar fullt resultat på uppgift 3 och 4 på A-delen. För betyg C krävs således *mer* än full pott på uppgift1 (KS1), uppgift 2 (KS2), samt uppgift 3-4 (inlämningsuppgifter och datorlaboration).

Minst 17 poäng totalt på A-delen ger betyg D och rätt att betygsättas på del B. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Den som är godkänd på kontrollskrivning 1 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 1 nedan. Den som är godkänd på kontrollskrivning 2 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 2 nedan. Uppgifterna 3 och 4 på tentan motsvarar de fem inlämningsuppgifterna. Man får tillgodoräkna sig maximalt resultat av det på inlämninguppgifterna, dvs. högst 2+2+2+2+4=12 avrundat nedåt till 10, alternativt det på tentan. Uppgift 5 har ingen motsvarighet i kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter.

För del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg minst D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt följande:

Tre eller fler rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg A.
Två rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg B.
En rätt löst uppgift på del B ger säkert betyg C.
Betyg C kan också erhållas genom att man uppnår totalt minst 17 poäng på A-delen och minst 21 poäng på A- och B-del tillsammans. Härvid ger uppgifterna på B-delen maximalt 5 poäng vardera.

Det är viktigt att du anger ev. bonuspoäng på tentan. Ange separat bonuspoäng för KS1, KS2 samt hemuppgifter och datorlaboration.
Kontrollera bonuslistan hos skrivningsvakten.
Lycka till!

Var god vänd!

Del A.

1. Bevisa med Eulers formel att

$$\cos 2z = \cos^2 z - \sin^2 z$$

för alla komplexa tal z.

2. Utveckla funktionen

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 4}$$

i Laurentserie i området $\{z : |z - 2i| > 4\}$.

3. Hur många nollställen har polynomet

$$2z^4 - 2z^3 + 2z^2 - 2z + 9$$

i cirkelskivan $|z| < 1$.

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + x + 1}\, dx.$$

med residykalkyl. Fullständiga argument med angivande av alla uppskattningar krävs för full poäng.

5. Finn alla Möbiustransformationer som avbildar högra halvplanet på enhetscirkeln $|z| < 1$.

Var god vänd!

Del B.

6. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2x^2} \cos 2bx \, dx$$

genom att integrera e^{-z^2} längs en rektangel med hörnpunkterna i

$$\pm R, \ \pm R + i\frac{c}{2}$$

och sedan låta $R \to \infty$.

7. Bevisa att om $f(z)$ är en hel funktion (dvs en funktion analytisk i hela komplexa talplanet), $n \geq 0$ ett heltal, och om

$$|f(z)| < M(1 + |z|^n)$$

för någon konstant M och för alla z så gäller att $f(z)$ är ett polynom av högst grad n.

8. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

9. Formulera och bevisa satsen om Laurentserier.