Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 21 oktober 2016

Skrivtid 14.00-19.00. Inga hjälpmedel är tillåtna. Skriv tydliga lösningar med utförliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.

Bonuspoäng tillgodoräknas enligt följande. Den som är godkänd på kontrollskrivning 1 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 1 nedan. Den som är godkänd på kontrollskrivning 2 får 5 poäng och ska inte lösa uppgift 2 nedan. Den som är godkänd på inlämningsuppgifterna med minst 10 poäng ska ej lösa upgifterna 3 och 4 nedan utan får 5 poäng på vardera automatiskt.

För del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt följande:

Tre eller fler rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg A.
Två rätt lösta uppgifter på del B ger säkert betyg B.
En rätt löst uppgift på del B ger säkert betyg C.
Om mindre än en uppgift lösts rätt kvarstår betyget D.

Kontrollera bonuslistan hos skrivningsvakten.
Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z så att $\sin z = 3$.

2. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet. Låt $u(z) = \text{Re f(z)}$ och $v(z) = \text{Im f(z)}$ på Ω. Visa att funktionen

$$h(z) = u(z)v(z)$$

är harmonisk i Ω.

3. Funktionen
$$f(z) = \frac{1}{z(z+1)(z+2)}$$
kan utvecklas i Laurentserie omkring $z = 0$. Det finns tre möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden och de tre serierna.

4. Beräkna integralen
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 4x + 6}\, dx.$$

5. Finn en konform avbildning $w = f(z)$ som avbildar $|z| < 1$ på $|w| < 1$ sådan att $f(0) = \frac{1}{2}$.

Del B.

6. Undersök vilka hela funktioner $f(z)$ som satisfierar olikheten
$$|f(z)| \geq \frac{|z|^2}{1 + |z|}$$
för alla komplexa z. Vi minns här att en funktion sägs vara *hel* om den är analytisk i hela komplexa talplanet.

7. Formulera och bevisa residusatsen.

8. Hur många rötter har ekvationen $z^5 + 10z - 1 = 0$ för $1 < |z| < 2$?

9. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling för en funktion som är analytisk i en öppen cirkelskiva.