Kontrollskrivning, 2017-10-02, kl. 08.00 – 10.00 .

SF1628 Komplex analys, för F.

Lösningsförslag Kontrollskrivning 2.

1. Taylorutveckla funktionen

$$f(z) = \frac{2+z}{z(z-1)}$$

i punkten $z = 2i$. Vilken blir konvergensradien? (3)

Funktionen $f(z)$ har poler i $z = 0$ och $z = 1$ och inga singulariteter utöver dessa. Konvergensradien blir nu avståndet till närmaste singularitet från punkten $2i$, och eftersom 0 är närmast blir konvergensradien $|2i - 0| = 2$. För att beräkna Taylorutvecklingen använder vi partialbråksuppdelning:

$$f(z) = \frac{2+z}{z(z-1)} = \frac{A}{z} + \frac{B}{z-1}.$$

Konstanterna finner vi till $A = -2$ och $B = 3$. Det förenklar att skriva $z = 2i + \zeta$, så att

$$f(z) = f(2i+\zeta) = \frac{A}{2i+\zeta} + \frac{B}{2i-1+\zeta} = -\frac{2}{2i+\zeta} + \frac{3}{2i-1+\zeta}.$$

Vi använder nu formeln för geometrisk summa:

$$\frac{1}{2i+\zeta} = \frac{1}{2i}\frac{1}{1+\frac{\zeta}{2i}} = \frac{1}{2i}\left(1 - \frac{\zeta}{2i} + \left(\frac{\zeta}{2i}\right)^2 - \cdots\right)$$

samt

$$\frac{1}{2i-1+\zeta} = \frac{1}{2i-1}\frac{1}{1+\frac{\zeta}{2i-1}} = \frac{1}{2i-1}\left(1 - \frac{\zeta}{2i-1} + \left(\frac{\zeta}{2i-1}\right)^2 - \cdots\right)$$

Taylorutvecklingen blir därför

$$f(z) = f(2i+\zeta) = -\frac{1}{i}\left(1 - \frac{\zeta}{2i} + \left(\frac{\zeta}{2i}\right)^2 - \cdots\right) + \frac{3}{2i-1}\left(1 - \frac{\zeta}{2i-1} + \left(\frac{\zeta}{2i-1}\right)^2 - \cdots\right)$$

där vi bör arrangera om i summan så att vi får fram en enda summa över potenser i ζ , samt slutligen återsubstituera $\zeta = z - 2i$.

---

2. Funktionen

$$f(z) = \tan z$$

har en singularitet i punkten $z = \frac{\pi}{2}$. Vilken typ av singularitet handlar det om? Laurentserieutveckla funktionen så gott du kan närmast punkten $z = \frac{\pi}{2}$ samt beskriv det största ringområde denna Laurentserie konvergerar inom. (3)

Det är lätt att se att funktionen har en pol av ordning 1 i $z = \frac{\pi}{2}$. Om vi t ex substituerar $z = \frac{\pi}{2} + \zeta$ så är

$$f(z) = f(\tfrac{\pi}{2} + \zeta) = \tan(\tfrac{\pi}{2} + \zeta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{2} + \zeta)}{\cos(\frac{\pi}{2} + \zeta)} = -\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta}$$

och eftersom $\sin\zeta$ bara har ett enkelt nollställe i $\zeta = 0$ följer det att $f(\frac{\pi}{2} + \zeta)$ har en enkelpol i $\zeta = 0$. Vi kan Taylorutveckla $\sin\zeta$ och $\cos\zeta$:

$$\sin\zeta = \zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + O(\zeta^5), \qquad \cos\zeta = 1 - \frac{\zeta^2}{2!} + O(\zeta^4),$$

så att

$$\begin{aligned}
-\frac{\cos\zeta}{\sin\zeta} &= -\frac{1 - \frac{\zeta^2}{2!} + O(\zeta^4)}{\zeta - \frac{\zeta^3}{3!} + O(\zeta^5)} = -\zeta^{-1}\frac{1 - \frac{\zeta^2}{2!} + O(\zeta^4)}{1 - \frac{\zeta^2}{3!} + O(\zeta^4)} \\
&= -\zeta^{-1}\Big(1 - \frac{\zeta^2}{2!} + O(\zeta^4)\Big)\Big(1 + \frac{\zeta^2}{3!} + O(\zeta^4)\Big) \\
&= -\zeta^{-1}\Big(1 - \frac{\zeta^2}{3} + O(\zeta^4)\Big) = -\zeta^{-1} + \frac{\zeta}{3} + O(\zeta^3)
\end{aligned}$$

Om vi återsubstituerar får vi

$$f(z) = \tan z = -(z - \tfrac{\pi}{2})^{-1} + \frac{z - \frac{\pi}{2}}{3} + O((z - \tfrac{\pi}{2})^3)$$

vilket ger de första termerna i Laurentserieutvecklingen runt $z = \frac{\pi}{2}$.

---

3. Beräkna följande integral med residukalkyl:

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t}{2 - \sin t}\, dt.$$

(3)

Vi skriver $\zeta = e^{it}$ som en parametrisering av enhetscirkeln och noterar att $d\zeta = ie^{it}dt$, dvs $dt = \frac{d\zeta}{i\zeta}$. Dessutom är därvid

$$\cos t = \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2}, \quad \sin t = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i},$$

så den sökta integralen är lika med

$$\int_{|\zeta|=1} \frac{(\frac{\zeta+\zeta^{-1}}{2})^2}{2 - \frac{\zeta-\zeta^{-1}}{2i}} \frac{d\zeta}{i\zeta} = \frac{1}{2}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^2 + 2 + \zeta^{-2}}{4i\zeta - \zeta^2 + 1} d\zeta = \frac{1}{2}\int_{|\zeta|=1} \frac{\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1}{\zeta^2(4i\zeta - \zeta^2 + 1)} d\zeta,$$

tagen i positiv led. Uttrycket

$$\frac{\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1}{\zeta^2(4i\zeta - \zeta^2 + 1)}$$

är rationellt, med poler i tre punkter, i $\zeta = 0$ samt i $\zeta = i(2 \pm \sqrt{3})$. Bara två av dessa ligger innanför enhetscirkeln, nämligen $\zeta_0 = 0$ och $\zeta_1 = i(2 - \sqrt{3})$. Eftersom

$$\begin{aligned}\frac{\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1}{\zeta^2(4i\zeta - \zeta^2 + 1)} &= \zeta^{-2}(1 + 2\zeta^2 + \zeta^4)(1 + 4i\zeta - \zeta^2)^{-1} \\ &= \zeta^{-2}(1 + O(\zeta^2))(1 - 4i\zeta + O(\zeta^2)) = \zeta^{-2} - 4i\zeta^{-1} + O(1)\end{aligned}$$

runt $\zeta = 0$ blir residun i denna punkt lika med $-4i$. Motsvarande kalkyl runt punkten ζ_1 ger att

$$\frac{\zeta^4 + 2\zeta^2 + 1}{\zeta^2(4i\zeta - \zeta^2 + 1)} = \frac{\zeta_1^4 + 2\zeta_1^2 + 1}{\zeta_1^2(4i - 2\zeta_1)(\zeta - \zeta_1)} + O(1) = 2i\sqrt{3}(\zeta - \zeta_1)^{-1} + O(1)$$

så residun i ζ_1 blir $2i\sqrt{3}$. Vi ska lägga ihop residuerna, multiplicera med $2\pi i$, samt slutligen multiplicera med $\frac{1}{2}$. Resultatet blir då $\frac{1}{2}(2\pi i)(-4i + 2i\sqrt{3}) = 2\pi(2 - \sqrt{3})$.