Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Tentamen i Komplex analys, SF1628, den 20 december 2017

Skrivtid 08.00-13.00. Inga hälpmedel är tillåtna utöver skrivdon och suddgummi. Skriv tydliga lösningar med utörliga motiveringar.

För del **A** gäller följande. Uppgifterna poängsätts med maximalt 5 poäng per uppgift. 14 poäng ger betyg E. 13 poäng ger betyg Fx, med rätt till komplettering.
Bonuspoäng tillgodoräknas enligt beskrivning på kurssidan.

Avseende del **B** gäller följande. Först måste man vara godkänd på del **A** med betyg D, antingen via kontrollskrivningar och inlämningsuppgifter eller alternativt med komplettering med poäng erhållna på del A enligt ovan.

Betygsättningen görs sedan enligt beskrivning på kurssidan.

Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z sådana att $\cos z = 15$.

Vi skriver $w = e^{iz}$, så att $\cos z = \frac{1}{2}(w + w^{-1})$, och ekvationen blir $w + w^{-1} = 30$, dvs $w^2 - 30w + 1 = 0$, med lösning $w = 15 \pm \sqrt{224}$. Vi logaritmerar och får $iz = \ln(15 \pm \sqrt{224}) + 2n\pi i$, dvs $z = -i\ln(15 \pm \sqrt{224}) + 2n\pi$, där n är ett heltal.

---

2. Låt funktionen u vara på formen

$$u(z) = u(x, y) = x^3 - bxy^2,$$

där b är en reell konstant. Antag att u är harmonisk. Vad måste då b vara? Bestäm för detta värde på b ett harmoniskt konjugat till u.

Vi applicerar Laplacianen på u:

$$\nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(x^3 - bxy^2) = 6x - 2bx,$$

så för att få 0 behöver $b = 3$. Vi ser nu att $u = \operatorname{Re} z^3$ och att därför ett harmoniskt konjugat ges av $v = \operatorname{Im} z^3 = 3x^2y - y^3$.

---

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{2}{1+z^2}$$

kan utvecklas i Laurentserie omkring punkten $z = i$. Det finns två möjliga konvergensområden för sådana Laurentserier. Ange dessa områden samt beräkna de två serierna.

Funktionen har poler i $z^2 = -1$, dvs $z = \pm i$. Utgående från i är avståndet till den andra polen 2, och vi får konvergensområdena $0 < |z-i| < 2$ och $|z-i| > 2$. Vi går nu över till att räkna ut Laurentserierna ifråga.

Vi skriver $z = i + \zeta$, så att

$$f(z) = f(i+\zeta) = \frac{2}{1+(i+\zeta)^2} = \frac{2}{2i\zeta + \zeta^2} = \frac{-i\zeta^{-1}}{1 - \frac{i\zeta}{2}}.$$

För $0 < |z-i| < 2$ blir

$$f(z) = f(i+\zeta) = \frac{-i\zeta^{-1}}{1-\frac{i\zeta}{2}} = -i\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n \zeta^{n-1} = -i\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^{n-1}$$

den sökta Laurentserien. Analogt blir Laurentserien för $|z-i| > 2$

$$f(z) = i\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{i}{2}\right)^{-n-1}(z-i)^{-n-2}.$$

---

4. Beräkna integralen

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 - 6x + 12)^2}$$

med hjälp av residukalkyl.

Ekvationen $z^2 - 6z + 12 = 0$ har rötterna $z = 3 \pm \sqrt{9-12} = 3 \pm i\sqrt{3}$. En rot ligger i övre halvplanet, $3+i\sqrt{3}$. Vi beräknar redidun i $3+i\sqrt{3}$ till $-\frac{i}{12\sqrt{3}}$, och enligt generaliserade residusatsen blir, eftersom funktioner avtar tillräckligt fort i övre halvplanet, integralen lika med $\frac{\pi}{6\sqrt{3}}$.

---

5. Låt Möbiusavbildningen

$$T(z) = \frac{z-3i}{z+3i}$$

vara given. Finn bilden under denna avbildning av området

$$G = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \cap \{z : \operatorname{Re} z > 0\}.$$

Möbiusavbildningen skickar reella axeln på enhetscirkeln, och imaginära axeln på reella axeln. Vi ser av detta att $T(G)$ kan vara ett av de fyra olika områdena som avgränsas av dessa två kurvor (enhetscirkeln och reella axeln). Instoppning av lämplig punkt, t ex $z = 1 + 3i$, visar att det blir området som ges av $|\zeta| < 1$ och $\operatorname{Im} \zeta < 0$.

Del B.

6. Finns det någon funktion $f(z)$ som är analytisk i skivan $|z| < 1$, sådan att

$$f(2^{-n}) = 4^{-n} \quad \text{för } n = 1, 2, 3, \ldots?$$

Om den finns, är den i så fall entydig?

Funktionen $f(z) = z^2$ uppfyller villkoren. Eftersom följden 2^{-n} hopar sig i origo som är en inre punkt är funktionen entydig.

---

7. Formulera och bevisa maximumprincipen för analytiska funktioner.

Se läroboken.

---

8. Beräkna den generaliserade Riemannintegralen

$$\int_0^\infty \frac{\sin(3x)}{x} dx$$

medelst Residukalkyl. Var noggrann i dina motiveringar!

Man betraktar funktionen $f(z) = \frac{e^{iz}}{z}$ och integrerar över ett en kurva där man undviker den singulära punkten origo. Svaret blir efter en hel del räkning $\frac{\pi}{2}$.

---

9. Formulera och bevisa argumentprincipen.

Se läroboken.