Institutionen för matematik
KTH
Håkan Hedenmalm

Lösningsförslag till tentamen i Komplex analys SF1691 (SF1628), den 14 augusti 2019

Skrivtid 14.00-19.00. Inga hälpmedel är tillåtna utöver skrivdon och suddgummi. Skriv tydliga lösningar med utörliga motiveringar.

Betygsättningen görs i enlighet med beskrivningen på kurssidan.

Lycka till!

Del A.

1. Finn alla komplexa tal z sådana att $z^{10} = i$.

Vi skriver det komplexa talet på polär form $z = re^{i\theta}$, så att $z^{10} = r^{10}e^{10i\theta}$. Å andra sidan är på polär form $i = e^{i\pi/2}$. Jämförelse ger att $r^{10} = 1$ och $e^{10i\theta} = e^{i\pi/2}$. Eftersom $r \geq 0$ måste $r = 1$ och vinkeln θ måste uppfylla $10\theta = \pi/2 + 2n\pi$ för något heltal n. Detta ger $\theta = \frac{\pi}{20} + \frac{n}{5}\pi$. Detta ger lösningarna $z = e^{i(\pi/20+n\pi/5)}$. Härvid kan vi inskränka till $n = 0, 1, \ldots, 9$ (alla andra n motsvarar ett av dessa).

---

2. Antag att funktionen $f(z)$ är analytisk i ett öppet område Ω i komplexa talplanet. Låt $u(z) = \mathrm{Re\ f(z)}$ och $v(z) = \mathrm{Im\ f(z)}$ på Ω. Antag att den associerade funktionen

$$F_a(z) = u(z) + iav(z),$$

där a är en reell konstant, är analytisk den med. Vad kan sägas om talet a?

Att f är analytisk innebär enligt Cauchy-Riemann att $u'_x = v'_y$ och $u'_y = -v'_x$. Att även F_a är analytisk innebär att dessutom $u'_x = av'_y$ samt $u'_y = -av'_y$. Kombinerar vi dessa ser vi att $0 = u'_x - u'_x = (1-a)v'_y$ samt $0 = u'_y - u'_y = (a-1)v'_x$. Om nu $a = 1$ så ger detta ingenting extra och självklart är $F_a = f$. Men om $a \neq 1$ så följer att $v'_x = 0$ och $v'_y = 0$, så v är konstant. Men då blir även u konstant (enligt Cauchy-Riemann). Alltså är $f = u + iv$ konstant ifall $a \neq 1$.

---

3. Funktionen

$$f(z) = \frac{z^{-10}}{1+2z}$$

har en singularitet i origo. Vilken typ av singularitet handlar det om? Laurentserieutveckla funktionen i ringområden runt origo som är så stora som möjligt. Obs! Det blir två olika ringområden.

Funktionen har en pol av ordning 10 i origo. Laurentserieutvecklingarna blir

$$f(z) = \frac{z^{-10}}{1+2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^n z^{n-10}$$

för $0 < |z| < \frac{1}{2}$ och

$$f(z) = \frac{z^{-10}}{1+2z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n 2^{-n-1} z^{-n-11}$$

för $|z| > \frac{1}{2}$.

---

4. Beräkna integralen

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{2 - \sin t - \cos t}.$$

Om $\zeta = e^{it}$ parametriserar enhetscirkel Γ, så är $dt = d\zeta/(i\zeta)$, $\sin t = \frac{\zeta - \zeta^{-1}}{2i}$, $\cos t = \frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2}$, så integralen blir

$$-2i \int_\Gamma \frac{d\zeta}{4\zeta + (i-1)\zeta^2 - 1 - i},$$

Om vi skriver $F(\zeta) = 4\zeta + (i-1)\zeta^2 - 1 - i$ så har $F(\zeta)$ nollställen i $\zeta = (1 \pm \frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$, och det som ligger innanför Γ blir $\zeta_1 = (1 - \frac{1}{\sqrt{2}})(1+i)$. Linearisering i nollstället ger

$$F(\zeta) \approx F'(\zeta_1)(\zeta - \zeta_1),$$

vilket ger att

$$-2i \int_\Gamma \frac{d\zeta}{4\zeta + (i-1)\zeta^2 - 1 - i} = 2\pi i(-2i)\,\frac{1}{F'(\zeta_1)} = \frac{4\pi}{2+\sqrt{2}}.$$

5. Finn en Möbiusavbildning $w = f(z)$ som avbildar skivan $|z| < 1$ på halvplanet $\operatorname{Re} w > -1$ sådan att $f(0) = 0$.

Möbiusavbildningen $w = \frac{2z}{1-z}$ har dessa egenskaper.

Del B.

6. Undersök vilka hela funktioner $f(z)$ som satisfierar olikheten

$$|f(z)| \geq |z|^a$$

för alla komplexa z. Här antas a vara ett reellt tal med $2 < a < 3$. Vi minns här att en funktion sägs vara *hel* om den är analytisk i hela komplexa talplanet.

Funktionen $f(z)$ kan bara ha nollställe i origo. Vi bildar $g(z) = z^2/f(z)$, som uppfyller $|g(z)| \leq |z|^{2-a}$ för $z \neq 0$. Funktionen är analytisk utom möjligen i origo och alltså begränsad i oändligheten. Tillväxtbegränsningen i origo är sådan att inte ens en enkelpol blir möjlig. Genom att bilda $G(z) = g(1/z)$ får vi en hel funktion med mycket begränsad växt i oändligheten och därför kan vi nytta Cauchy-uppskattningarna för att visa att $G(z)$ måste vara konstant. Men eftersom $|G(z)| = |g(1/z)| \leq |z|^{a-2}$ måste vi ha $G(0) = 0$ så $G(z) = 0$ överallt. Men då är $g(z) = 0$ och följaktligen finns ingen funktion $f(z)$ med de givna egenskaperna.

7. Formulera och bevisa algebrans fundamentalsats.

Se LB.

---

8. Beräkna residuintegralen

$$\int_\Gamma \frac{z\,dz}{e^z - 1},$$

där Γ är cirkeln med centrum i origo och radie $R = 10$.

Vi får poler i nollställena till $e^z - 1$, utom i $z = 0$. Dessa nollställen ligger i $z_n = 2\pi ni$, för heltal n. Det är enbart för $n = \pm 1$ som dessa hamnar innanför radien 10. Linearisering i z_n ger $e^z - 1 \approx e^{z_n}(z - z_n) = z - z_n$, så att

$$\frac{z}{e^z - 1} \approx \frac{z_n}{z - z_n}$$

för z nära z_n. Residun i z_n blir alltså lika med z_n. Vi summerar residuerna för $n = \pm 1$: $z_1 + z_{-1} = 0$, så integralen blir lika med 0.

---

9. Formulera och bevisa satsen om Taylorutveckling för en funktion som är analytisk i en öppen cirkelskiva.

Se LB.