Ö1

$\boxed{1.1}$ 3, 5, 21, 39, 58

$\boxed{1.2}$ 15, 21, 49, 51

$\boxed{1.3}$ 3, 5, 11, 33

1.1.3) $t^5 y^{(4)} - t^3 y'' + 6y = 0$

linjär, ordn. 4

5) $\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

olinjär, ordning 2.

21) $\frac{dP}{dt} = P(1-P)$

$$P = \frac{c_1 e^t}{1 + c_1 e^t}$$

Vi beräknar $P' = \frac{dP}{dt}$ med kvotregeln:

$$VL = \frac{dP}{dt} = \frac{c_1e^t(1+c_1e^t) - c_1e^t \cdot (c_1e^t)}{(1+c_1e^t)^2} =$$

$$= \frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}$$

$$HL = P(1-P) = \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}\left(1 - \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t}\right) =$$

$$= \frac{c_1e^t}{1+c_1e^t} \cdot \frac{1+c_1e^t - c_1e^t}{1+c_1e^t} = \frac{c_1e^t}{(1+c_1e^t)^2}$$

$\therefore\ VL = HL$ Klart!

---

39) Det måste först handla om en DE med komplexa tal i sig.

$y'(x) = i = \sqrt{-1}$ Kanske funkar?

i är en konstant så $y = ix + C$ är allmän lösn. och ingen av dessa är reellvärd.

$$\boxed{(y')^2 + 1 = 0 \quad \text{räcker!}}$$

58 $y' = y^2 + 4$

a) Inga konstanta lösn. varför?

Om $y = C$ så $y' = 0$ och $0 = C^2 + 4 \geq 4$

är omöjligt (om y är reellvärd).

b) relativa extrempunkter. Där är $y' = 0$

och $0 = y^2 + 4 \geq 4$ är olösligt. Så

rel. extr. punkter saknas!

c) Där $y = 0$ är en inflexionspunkt. Varför?

Inflexionspunkt är där vi byter konvex/konkav

eller konkav/konvex. Ett enkelt kriterium är

att y'' ska växla tecken.

$$y' = y^2 + 4 \Rightarrow y'' = 2yy' = 2y\underbrace{(4+y^2)}_{\geq 4}$$

Så y'' har samma tecken som y!

Men $y' = y^2 + 4 \geq 4$ så $y < 0$ till

vänster och $y > 0$ till höger. Dvs vi växlar

konkav/konvex.

1.2 15)

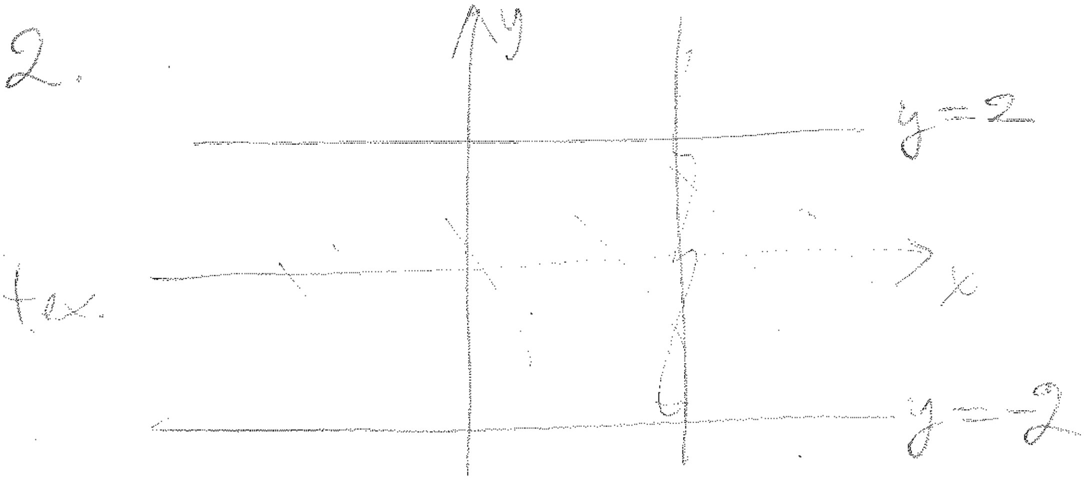
$$y' = 3y^{2/3}, \quad y(0) = 0.$$

a) första lösningen: $y(x) = 0$ överallt.
$\Rightarrow y' = 3\cdot(0)^{2/3} = 0.$

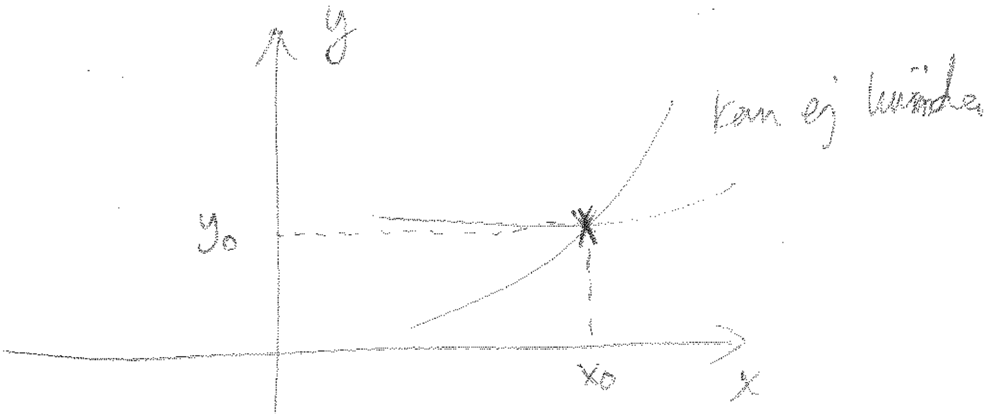
b) andra lösningen: $y(x) = x^3$ (överallt)
eftersom $y' = 3x^2$
$3y^{2/3} = 3(x^3)^{2/3} = 3x^2.$

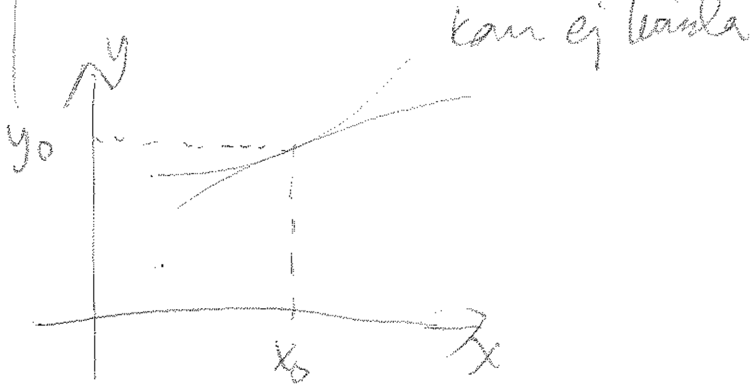
21) $(4-y^2)y' = x^2$ så $y' = \dfrac{x^2}{4-y^2}$

Bestäm ett område i xy-planet där DE har en lokal entydig lösn genom varje punkt.
Här ska vi bara undvika att $4-y^2=0$ dvs $y = \pm 2$.



+9





Orsak: skulle motsäga Sats 1.2.1.

5i) $\begin{cases} \frac{dP}{dt} = 0.15P + 20 \\ P(0) = 100 \end{cases}$

Sökt kvantitet: $\left.\frac{dP}{dt}\right|_{t=0} = P'(0)$

Ur DE: $\frac{dP}{dt} = 0.15P + 20 \overset{t=0}{=} 15 + 20 = 35$

1.3 3)

$$P'_{birth}(t) \propto P(t)$$

$$P'_{death}(t) \propto (P(t))^2$$

$$P'(t) = C_1 P(t) - C_2 (P(t))^2$$

C_1, C_2 är konstanter.

---

5) Newtons avkylningslag.

$$\frac{dT}{dt} = k(T - T_m) \qquad (k<0).$$

Bestäm k, T_m ur figuren.

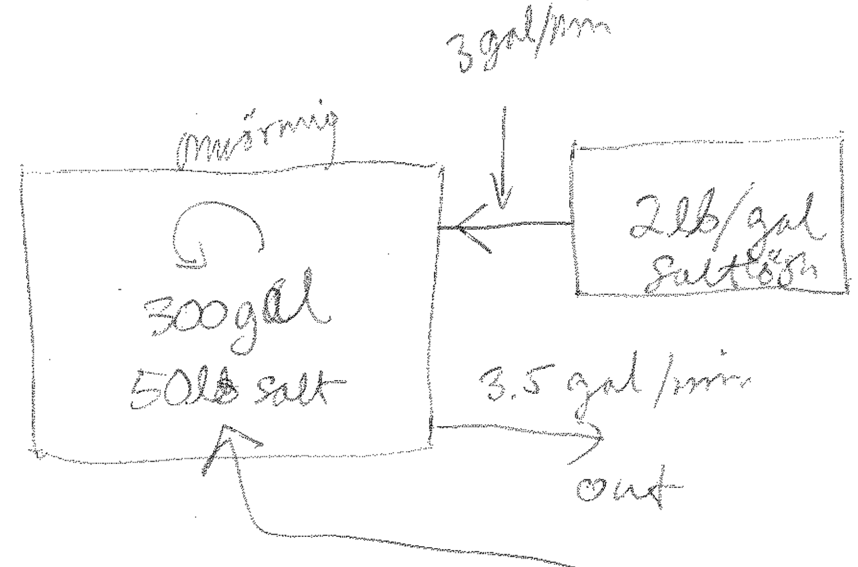
$$T_m = 75^\circ F$$

$$\left.\frac{dT}{dt}\right|_{t=0} = \frac{-175}{25} = -7\,^\circ F/\text{min}$$

$$k = \frac{dT/dt}{T - T_m} \overset{t=0}{=} \frac{-7}{175-75} = -\frac{7}{100}\ \text{min}^{-1}$$

$$\begin{cases} T(0) = 175 \\ T_m = 75 \end{cases}$$

11)



$A(t)$ = mängd salt i tanken

$A(0) = 50$ lb givet.

$$A'(t) = \underbrace{6 \text{ lb/min}}_{2\cdot 3} - \overbrace{\frac{A(t)}{\underbrace{300-0.5t}_{\text{totala volymen}}}}^{\text{konc.}} \cdot \overbrace{3.5}^{\text{utförsel hastighet}}$$

33)

$$\frac{dP}{dt} = (k \cos t) P, \quad k > 0 \text{ konstant.}$$

Vilken sorts population kan denna ekvation beskriva?

Lösning: periodvis gott om föda/ont om föda. Troligtvis årstidsvariation el. liten population så överbefolkningsproblem saknas