Ö2

2.1 25, 33, 35, 39

2.2 17, 43, 55

2.3 5, 17, 39, 45, 52

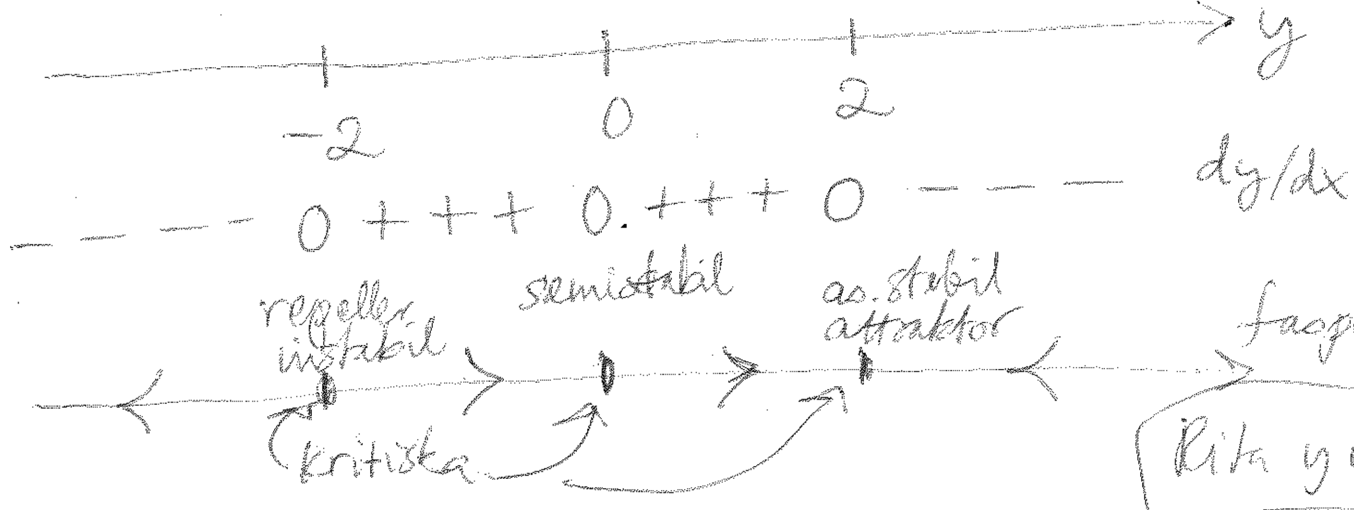
2.5 5, 19

2.1 25) $\frac{dy}{dx} = y^2(4-y^2)$

autonom DE.

teckenstudium

$\left.\begin{array}{l} y=0 \\ y=2 \\ y=-2 \end{array}\right\}$ kritiska



fasporträtt

Rita y uppåt

33) Antag att $y(x)$ är en icke-konstant lösn. till autonoma ekv. $y' = f(y)$, och att c är en kritiskt punkt.
Vi antar att f är regulljär, dvs att $f'(y)$ är kontinuerlig!
Då kan inte en annan lösn. korsa lösn. $y = c$ eftersom det skulle motsäga entydighetssatsen för ODE (Sats 1.2.1).

---

35) $\boxed{y' = f(y)}$ ekv. (2).
Hur kan vi få info om inflexionspunkter?
Där så byter y'' tecken.
Derivera ekv. (2):

$$y'' \overset{\text{DE}}{=} f'(y) \cdot \underbrace{y'}_{\text{inre der.}} \overset{\text{DE}}{=} f'(y) \cdot f(y)$$

I en inflexionspunkt måste (om $f \in C^1$)

$$\begin{cases} f(y) = 0 & \text{eller} \\ f'(y) = 0 \end{cases}$$

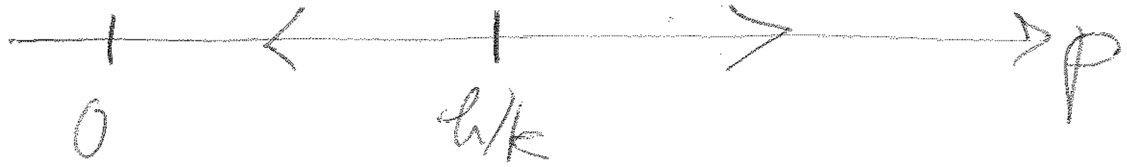
och dessa kan vi markera lösn. till lägg med y-axeln!

39)
$$\begin{cases} \dfrac{dP}{dt} = kP - h \\ \qquad k, h > 0 \text{ konstanter!} \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

För vilka värden på P_0 utrotas befolkningen?

$kP - h = 0 \Leftrightarrow P = h/k$

kritisk



Svar: om $P_0 < h/k$.

2.2 (7) $$\frac{dP}{dt} = P - P^2 = P(1-P)$$

Lös med variabelseparation!

$$\frac{dP}{P(1-P)} = dt \qquad \text{om inte } P=0,\ P=1$$

$$\int \frac{dP}{P(1-P)} = \int dt$$

$$\frac{1}{P(1-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{1-P}$$

$$1 = A(1-P) + BP = A + P(B-A)$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ B - A = 0 \end{cases} \qquad B = 1$$

$$\frac{1}{P(1-P)} = \frac{1}{P} + \frac{1}{1-P}$$

$$\int \frac{dP}{P(1-P)} = \ln|P| - \ln|1-P| + C_0$$

$$= \ln\left|\frac{P}{1-P}\right| + C_0$$

$$\int dt = t + C_1$$

5

$$\ln\left|\frac{P}{1-P}\right| + C_0 = t + C_1$$

$$\ln\left|\frac{P}{1-P}\right| = t + C_2 \qquad (C_2 = C_1 - C_0)$$

$$\boxed{\left|\frac{P}{1-P}\right| = e^{C_2} \cdot e^{t}}$$

Eftersom P skall vara kontinuerlig och inte kan passera $P=0$ och $P=1$ så måste

$$\frac{P}{1-P} = C_3 e^{t} \quad \text{där} \quad |C_3| = e^{C_2}$$

konstant pos. eller neg.

$$\frac{P}{1-P} = Y \quad \text{Löses:} \quad P = Y(1-P)$$

$$P + YP = Y$$

$$P(1+Y) = Y$$

$$P = \frac{Y}{1+Y}$$

så att: $P = \dfrac{C_3 e^{t}}{1 + C_3 e^{t}}$

utöver dessa lösn. finns de konstanta lösn. $P=0$, $P=1$

6

B) Varje DE av formen $y' = f(y)$ (autonom) är förstås separabel.

~~Finn~~ Lösn. till

$$\begin{cases} y' = y - y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad \text{med} \begin{cases} y_0 = 2 \\ y_0 = 1/2 \\ y_0 = -1/2 \\ y_0 = -2 \end{cases}$$

Vi får då fyra st lösn. som vi kallar y_1, y_2, y_3, y_4.

$y = 0, \; y = \pm 1$ kritiska

$$\frac{dy}{y(1-y^2)} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y(1-y^2)} = \int dx = x + C_1$$

PBU: $\dfrac{1}{y(1-y^2)} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{y}{1-y^2}$

$$\int \frac{dy}{(1-y^2)y} = \ln|y| - \frac{1}{2}\ln|1-y^2| + C_0$$

$$\ln\left|\frac{y^2}{1-y^2}\right| = 2x + C_2$$

$$\frac{y^2}{1-y^2} = C_3 e^{2x}$$

$$y^2 = \frac{C_3 e^{2x}}{1+C_3 e^{2x}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{y^2}{1-y^2} = Y \\ &y^2 = (1-y^2)Y = \\ &\quad = Y - y^2 Y \\ &y^2(1+Y) = Y. \\ &y^2 = \frac{Y}{1+Y} \end{aligned}}$$

a) $y_1(0) = 2$; $\underset{4}{\underbrace{(y_1(0))^2}} = \frac{C_3}{1+C_3}$

$C_3 = 4(1+C_3)$

$C_3 = 4 + 4C_3$

$3C_3 = -4$

$C_3 = -4/3$

$$(y_1)^2 = \frac{(-4/3)e^{2x}}{1-\frac{4}{3}e^{2x}} = \frac{-4e^{2x}}{3-4e^{2x}} =$$

$$= \frac{4}{4-3e^{-2x}} \quad \text{så } y_1 = \frac{2}{\sqrt{4-3e^{-2x}}}$$

b) $y_2(0) = \frac{1}{2}$; $\frac{1}{4} = (y_2(0))^2 = \frac{C_3}{1+C_3}$. $C_3 = \frac{1}{4} + \frac{C_3}{4}$

$\frac{3}{4}C_3 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow C_3 = \frac{1}{3}$

$$(y_2)^2 = \frac{\frac{1}{3}e^{2x}}{1+\frac{1}{3}e^{2x}} = \frac{e^{2x}}{3+e^{2x}} =$$

$$= \frac{1}{1+3e^{-2x}} \quad \text{så } y_2 = \frac{1}{\sqrt{1+3e^{-2x}}}$$

) $y_3(0) = -\frac{1}{2}$

$$C_3 = \frac{1}{3}$$

$$y_3 = -\frac{1}{\sqrt{1+3e^{2x}}}$$

d) $y_4(0) = -2$

p55 $C_3 = -\frac{4}{3}$

$$y_4 = -\frac{2}{\sqrt{4-3e^{2x}}}$$

---

55) $(y)^2 + (y')^2 = 1$

$$y' = \pm\sqrt{1-y^2}$$

a) $y' = \sqrt{1-y^2}$ $\qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$

$\arcsin y = x + C$ ([illegible])

$y = \sin(x+C)$

b) $y' = -\sqrt{1-y^2}$

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = -dx$$

$$y = \sin(-x+C)$$

Men egentligen ger a) och b) samma svar

$\boxed{y = \sin(x+C) \text{ är allmän lösn.}}$

2.3 5) $y' + 3x^2 y = x^2$

$$(e^{x^3} y)' = x^2 e^{x^3}$$

$$e^{x^3} y = \int x^2 e^{x^3} dx = \frac{1}{3} e^{x^3} + C_1$$

$$y = \frac{1}{3} + C_1 e^{-x^3}$$

Lösn. finns på hela linjen.

$e^{-x^3} \to 0$ då $x \to +\infty$ så den termen är transient

17) $\cos x \dfrac{dy}{dx} + (\sin x)\, y = 1.$

$$\frac{1}{\cos x}\frac{dy}{dx} + \frac{\sin x}{\cos^2 x}\, y = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\left(\frac{1}{\cos x}\, y\right)' = \frac{1}{\cos^2 x} = (\tan x)'$$

$$\frac{1}{\cos x}\, y = \tan x + C_1.$$

$\boxed{y = \sin x + C_1 \cos x.}$ upon transient term.

39) $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = f(x)$

$y(0) = 2$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 3 \\ 0, & x > 3 \end{cases}$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = f(x)\, e^{x^2}$$

$0 < x < 3$: $\dfrac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = e^{x^2} = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\left(\mathrm{erf}(x)\right)'$

$$e^{x^2} y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\mathrm{erf}(x) + C_1 \Rightarrow y = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\, e^{-x^2}\,\mathrm{erf}(x) + C_1 e^{-x^2}$$

$x > 3$: $\frac{d}{dx}\left(e^{x^2} y\right) = 0$

$$e^{x^2} y = C_2 \ , \quad y = C_2 e^{-x^2}$$

Kont i $x = 3$: $C_2 e^{-9} = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-9} \operatorname{erf}(9) + C_1 e^{-9}$

$y(0) = 2$ ska implementeras:

$$2 = \underbrace{\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{0} \operatorname{erf}(0)}_{=0} + C_1 \cdot e^{0} = C_1$$

så $C_1 = 2$.

$C_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(9) + 2$ så att

$$y = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-x^2} \operatorname{erf}(x) + 2e^{-x^2}, & 0 \le x < 3 \\ \left(\frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erf}(9) + 2\right) e^{-x^2}, & x > 3. \end{cases}$$

45) $xy' - 4y = x^6 e^x$

a) b) $y(0) = y_0$, där $y_0 > 0$ eller $y_0 = 0$.

c) $y(x_0) = y_0$, $x_0 > 0$, $y_0 > 0$.

---

a) om $y_0 = 0$. Då finns förmodligen en lösn.

$\cancel{xy}$ $y' - \frac{4y}{x} = x^5 e^x$.

$-\int \frac{4dx}{x} = -\ln x$

$\left(\frac{1}{x^4}y\right)' = \frac{1}{x^4}y' - \frac{4}{x^5}y \overset{DE}{=} xe^x$

$\frac{1}{x^4}y = \int xe^x dx = xe^x - e^x + C_1$

$y = x^5e^x - x^4e^x + C_1 x^4$

$y(0) = 0$ då har vi många lösn.

b) $y_0 > 0$. Ingen lösn.

c) Existens & entydighet enl sats 1.2.1.

52)

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\lambda_1 x \\[2ex] \dfrac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = x_0 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

λ_1, λ_2 är konstanter

$$\frac{dx}{dt} = -\lambda_1 x \Rightarrow x = C_1 e^{-\lambda_1 t}, \quad C_1 = x(0) = x_0$$

$$x = x_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{dy}{dt} = \lambda_1 x - \lambda_2 y = \lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t} - \lambda_2 y$$

$$\frac{dy}{dt} + \lambda_2 y = \lambda_1 x_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda_2 t} y\right) = \lambda_1 x_0 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

$$e^{\lambda_2 t} y = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C_2$$

$$e^0 y(0) = y_0 = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot e^0 + C_2$$

$$C_2 = y_0 - \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

$$y = \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} + C_2 e^{-\lambda_2 t} =$$

$$= \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right) + y_0 e^{-\lambda_2 t}$$

$$x = x_0 e^{-\lambda_1 t}$$

$$y = y_0 e^{-\lambda_2 t} + \frac{\lambda_1 x_0}{\lambda_2 - \lambda_1}\left(e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t}\right)$$

(allt om $\lambda_1 \neq \lambda_2$)

2.5

5) $(y^2+yx)dx - x^2dy = 0$

homogen ekv av grad 2.

$y = ux$ substitueras!

$dy = udx + xdu$

DE: $(u^2x^2+ux^2)dx - x^2(udx+xdu) = 0.$

$u^2x^2dx - x^3du = 0.$

$u^2dx - xdu = 0.$

$$\frac{dx}{x} = \frac{du}{u^2}$$

$C_1 + \ln|x| = -\frac{1}{u}$

$$u = -\frac{1}{C_1+\ln|x|}$$

19)

$$t^2 \frac{dy}{dt} + y^2 = ty$$

Bernoulli ekvation

$$\frac{dy}{dt} + \frac{y^2}{t^2} = \frac{y}{t}$$

$$\frac{dy}{dt} - \frac{y}{t} = -\frac{y^2}{t^2} \quad \boxed{n = +2}$$

$$u = y^{1-n} = y^{1-2} = \frac{1}{y} \quad \text{är substitutionen}$$

$$u = y^{-1} \; ; \; y = u^{-1} \Rightarrow \frac{dy}{dt} = -\frac{du/dt}{u^2}$$

DE: $$-\frac{du/dt}{u^2} - \frac{1}{tu} = -\frac{1}{t^2u^2}$$

$$\frac{du}{dt} + \frac{1}{t}u = \frac{1}{t^2}$$

$$t u' + u = \frac{1}{t}$$

$$(t u)' = \frac{1}{t}$$

$$t u = \ln|t| + C.$$

$$u = \frac{1}{t}\ln|t| + \frac{C}{t}.$$