(1)

Ö4

4.1 7, 17, 23, 35, 38, 40

4.2 9, 19

4.6 1, 11, 23

---

7) $\boxed{X(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t}$

allmän lösn. till $X'' + \omega^2 X = 0$ på $\mathbb{R}_0$

Visa att: lösningen till BVP

$$\begin{cases} X(0) = x_0 \\ X'(0) = x_1 \end{cases}$$ ges av $X(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{x_1}{\omega} \sin \omega t$.

Lösn. $X(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \Rightarrow$

$X'(t) = -C_1 \omega \sin \omega t + C_2 \omega \cos \omega t$

så att: $X(0) = C_1 = x_0$, $X'(0) = C_2 \omega = x_1$

$\Rightarrow C_1 = x_0$ & $C_2 = x_1 / \omega$.

17) $\begin{cases} f_1(x) = 5 \\ f_2(x) = \cos^2 x \\ f_3(x) = \sin^2 x \end{cases}$ så att :

$$f_1(x) - 5f_2(x) - 5f_3(x) =$$

$$= 5 - 5\cos^2 x - 5\sin^2 x = 5\underbrace{(1 - \cos^2 x - \sin^2 x)}_{=0} = 0$$

så ej linjärt oberoende !

23) $y'' - y' - 12y = 0$

e^{-3x}, e^{4x} fundamental lösn. mängd på $\mathbb{R}$.

Visa!

$$C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x} \overset{\text{alla } x}{=} 0 \Rightarrow C_1 = C_2 = 0.$$

Dessutom: $(e^{rx})'' - (e^{rx})' - 12(e^{rx}) =$

$$= (r^2 - r - 12)e^{rx} = (r+3)(r-4)e^{rx}$$

så e^{rx} är en lösn. då $r = -3$ och då $r = 4$.

Alla lösn. ges som $\boxed{y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{4x}}$

3

35) Visa att $y_{p,1} = 3e^{2x}$ och $y_{p,2} = x^2+3x$

är partikulärlösn. till

$$y'' - 6y' + 5y = -9e^{2x}$$

resp. $y'' - 6y' + 5y = 5x^2+3x-16$.

Lösn. $(y_{p,1})'' - 6(y_{p,1})' + 5y_{p,1} =$

$$= 3\cdot 2^2 e^{2x} - 6\cdot 6 e^{2x} + 5\cdot 3e^{2x} =$$

$$= (12-36+15)e^{2x} = -9e^{2x}$$

och

$$(y_{p,2})'' - 6(y_{p,2})' + 5y_{p,2} =$$

$$= (x^2+3x)'' - 6(x^2+3x)' + 5(x^2+3x) =$$

$$= 2 - 6\cdot(2x+3) + 5x^2 + 15x = 5x^2+3x-16.$$

klart!

(4)

38) Antag $y_1 = e^{x}$ och $y_2 = e^{-x}$ är två lösn. till en homogen linj DE. Förklara varför $y_3 = \cosh x$ och $y_4 = \sinh x$ också löser DE.

$y_3 = \cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})$ vilket är en linj komb av y_1 och y_2.

$y_4 = \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$ är pss en linj komb av y_1 och y_2.

---

40) Är $f_1(x) = e^{x+2}$, $f_2(x) = e^{x-3}$ linjärt oberoende på $\mathbb{R}$?

Lösn. ~~Eftersom~~

$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) = 0$

för $C_1 = e^{-2}$ och $C_2 = -e^{3}$ så är funktionerna linjärt beroende.

(2 : 9)

$$\text{DE}: \; x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$$

$y_1 = x^4$ är en lösn.

Kollräkning:
$$\begin{cases} y_1 = x^4 \\ y_1' = 4x^3 \\ y_1'' = 12x^2 \end{cases}$$

$$x^2y_1'' - 7xy_1' + 16y_1 = 12x^4 - 7\cdot 4x^4 + 16x^4 =$$

$$= \underbrace{(12 - 28 + 16)}_{=0} x^4 = 0$$

Vi letar lösn. på formen $y = y_1 u = x^4 u(x)$:

$$\begin{cases} y = x^4 u \\ y' = 4x^3 u + x^4 u' \\ y'' = 12x^2 u + 8x^3 u' + x^4 u'' \end{cases}$$

så att

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = 12x^4 u + 8x^5 u' + x^6 u''$$

$$-7x(4x^3 u + x^4 u') + 16x^4 u =$$

$$= \underbrace{(12x^4 - 28x^4 + 16x^4)}_{=0} u + x^6 u'' + (8x^5 - 7x^5) u' = 0$$

och vi får

$$x^2y'' - 7xy' + 16y = x^6u'' + x^5u' = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{xu'' + u'}_{(xu')'} = 0$$

$$\Leftrightarrow xu' = C_1 \Leftrightarrow u' = C_1x^{-1} \Leftrightarrow u = C_1\ln|x| + C_2$$

vilket ger att

$$y = (C_1\ln|x| + C_2)x^4$$

och en andra lösning är t. ex.

$$y_2 = x^4\ln|x|.$$

---

19) $y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$

$y_1 = e^x$ är en lösn. till hom. ekv.

$$\begin{cases} y = y_1u = e^xu \\ y' = e^x(u' + u) \\ y'' = e^x(u'' + 2u' + u) \end{cases}$$

Vi stoppar först in i motsvarande homogena ekvation $y'' - 3y' + 2y = 0$:

$$e^x(u'' + 2u' + u) - 3e^x(u' + u) + 2e^x u = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad u'' + 2u' + u - 3u' - 3u + 2u = 0.$$

$$\Leftrightarrow \quad u'' - u' = 0 \Leftrightarrow (e^{-x}u')' = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{-x}u' = C_1 \Leftrightarrow u' = C_1 e^x \Leftrightarrow u = C_1 e^x + C_2$$

så att ~~xxxxx~~ $y = y_1 u = (C_1 e^x + C_2)e^x$

och en annan lösn. y_2 är t.ex. $y_2 = e^{2x}$.

Vi löser fram den inhomogena ekv. $\left[\text{med } y = y_1 v\right]$:

$$y'' - 3y' + 2y = 5e^{3x}$$

$$e^x\left[v'' - v'\right] = 5e^{3x}$$

$$v'' - v' = 5e^{2x}$$

$$\Leftrightarrow \quad (e^{-x}v')' = 5e^x \Leftrightarrow e^{-x}v' = 5e^x + C_3 \Leftrightarrow$$

$$v' = 5e^{2x} + C_3 e^x \Leftrightarrow v = \frac{5}{2}e^{2x} + C_3 e^x + C_4$$

$y = y_1 v = \frac{5}{2}e^{3x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^x$ och $y_p = \frac{5}{2}e^{3x}$ fungerar!

1.6 : 1) Obs! $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$$y'' + y = \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Variation av parameter-metoden!

y_1, y_2 två lösn. till homogena ekv

$y'' + y = 0$. Vi tar $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$!

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$$

$$\Rightarrow y_p'' + y_p \overset{\text{kalkyl}}{=} [y_1 u_1' + y_2 u_2']' + y_1' u_1' + y_2' u_2' \overset{\text{vill vi}}{=} \frac{1}{\cos x}$$

vi lägger till ett extra-villkor att

$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$ överallt.

För då $[y_1 u_1' + y_2 u_2']' = 0$ och

DE blir

$$(*) \begin{cases} y_1' u_1' + y_2' u_2' = \frac{1}{\cos x} \\ y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \end{cases}$$ extravillkoret igen!!

$$\left\{\begin{array}{l} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \quad \text{extravillkoret} \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \frac{1}{\cos x} \quad \text{DE} \end{array}\right.$$

Linjär algebra: $\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\cos x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W} \begin{pmatrix} -\frac{y_2}{\cos x} \\ \frac{y_1}{\cos x} \end{pmatrix}, \text{ där } W = \text{Wronskianen}$$

$$= \det \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} =$$

$$= y_1 y_2' - y_1' y_2$$

Vi stoppar in

$$\begin{cases} y_1 = \cos x \Rightarrow y_1' = -\sin x \\ y_2 = \sin x \Rightarrow y_2' = \cos x \end{cases}$$

så att

$$W = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \cos x \cos x - (-\sin x)\sin x = 1$$

och alltså

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -\frac{y_2}{\cos x} \\ \frac{y_1}{\cos x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi väljer

$$\begin{cases} u_1 = \ln|\cos x| \\ u_2 = x \end{cases}$$

och får

$$\boxed{y_p = (\cos x)\ln|\cos x| + (\sin x)\,x}$$

som partikulärlösning!

11) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

Hom ekv $y'' + 3y' + 2y = 0$

Vi gissar $y = e^{rx} \Rightarrow$ kar.ekv. $r^2 + 3r + 2 = 0$

$\Leftrightarrow (r+1)(r+2) = 0$ rötter $r_1 = -1$, $r_2 = -2$.

$y_1 = e^{-x}$, $y_2 = e^{-2x}$.

Vi försöker hitta $y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2$.

$$\Rightarrow y_p'' + 3y_p' + 2y_p \overset{\text{kalkyl}}{=} [y_1 u_1' + y_2 u_2']' + \quad \text{vill vi!}$$

$$+ 3[y_1 u_1' + y_2 u_2'] + y_1' u_1' + y_2' u_2' = \frac{1}{1+e^x}$$

Vi lägger till extravillkoret att

$y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0$ överallt

för då $(y_1 u_1' + y_2 u_2')' = 0$.

DE blir
$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 & \text{extravillkoret!} \\ y_1' u_1' + y_2' u_2' = \frac{1}{1+e^x} & (DE) \end{cases}$$

Linjär algebra:

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix}$$

så att

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -2e^{-2x} & -e^{-2x} \\ e^{-x} & e^{-x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{1+e^x} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{W}\begin{pmatrix} -\frac{e^{-2x}}{1+e^x} \\ \frac{e^{-x}}{1+e^x} \end{pmatrix}; \quad W = \det\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{pmatrix} =$$

$$= y_1 y_2' - y_1' y_2 =$$

$$= e^{-x}(-2e^{-2x}) - (-e^{-x})e^{-2x} = -e^{-3x}$$

och

$$\begin{pmatrix} u_1' \\ u_2' \end{pmatrix} = -e^{3x}\begin{pmatrix} -\dfrac{e^{-2x}}{1+e^x} \\ \dfrac{e^{-x}}{1+e^x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{e^x}{1+e^x} \\ -\dfrac{e^{2x}}{1+e^x} \end{pmatrix}$$

så vi kan välja

$$\begin{cases} u_1 = \ln(1+e^x) \\ u_2 = \ln(1+e^x) - e^x. \end{cases}$$

Detta ger partikulär lösningen

$$y_p = y_1 u_1 + y_2 u_2 = e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\left[\ln(1+e^x) - e^x\right] =$$

$$= e^{-x}\ln(1+e^x) + e^{-2x}\ln(1+e^x) - e^{-x}.$$

$$\boxed{y_p = \left(e^{-x} + e^{-2x}\right)\ln(1+e^x) - e^{-x}}$$