$\boxed{\ddot{O}5}$

<u>8.1</u> 5, 13, 17, 25

<u>8.2</u> 5, 7, 21, 35, 37, 47

<u>8.3</u> 15, 21, 31

5) $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y + z + t - 1 \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y - z - 3t^2 \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y + z + t^2 - t + 2 \end{cases}$$

Skriv systemet på matrisform!

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{X}' = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mathbb{X} + \begin{pmatrix} t-1 \\ -3t^2 \\ t^2-t+2 \end{pmatrix}$$

13) $\underline{X}' = \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \underline{X}$

Vi ska visa att $\underline{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2}$

är en lösning till systemet ovan!

Vi ser att $\underline{X}' = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) e^{-3t/2} =$

$$= \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t/2} = VL$$

medan

$$HL = \begin{pmatrix} -1 & 1/4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \\ -1 - 2 \end{pmatrix} e^{-3t/2} = \begin{pmatrix} 3/2 \\ -3 \end{pmatrix} e^{-3t/2}$$

så $VL = HL$ och vi är klara!

(3)

24) $\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}, \; \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{6t}$.

Det är givet i uppgiften att $\underline{X}_{1,2}$ löser $\underline{X}' = A\underline{X}$. Eftersom $\underline{X}_1$ och $\underline{X}_2$ är linjärt oberoende ~~så~~ och är 2st så följer att $\underline{X}_1, \underline{X}_2$ är en fundamental mängd [för lösningsrummet].

---

25) Visa att den allmänna lösningen till

$$\underline{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \underline{X} \quad \text{är}$$

$$\underline{X} = c_1 \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} + c_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t}.$$

Obs: Räcker att visa att

$$\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t}, \; \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t}, \; \underline{X}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t},$$

är lösn. eftersom dessa är 3st och uppenbart linjärt oberoende.

④

$$\begin{cases} \underline{X}_1' = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix}(-e^{-t}) = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t} = VL_1 \\ \underline{X}_2' = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(-2e^{-2t}) = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} = VL_2 \\ \underline{X}_3' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}(3e^{3t}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} = VL_3. \end{cases}$$

medan

$$A\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} -6 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} e^{-t} = HL_1$$

$$A\underline{X}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-2t} = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-2t} = HL_2$$

$$A\underline{X}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3t} = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} e^{3t} = HL_3$$

och eftersom $VL_j = HL_j$ för $j = 1, 2, 3$ så har vi verifierat att vi har tre lösningar.

8.2 5)

$$\underline{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix}}^{A} \underline{X}$$

Hitta allmänna lösningen!

Egenvärden till A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 10-\lambda & -5 \\ 8 & -12-\lambda \end{vmatrix} = (10-\lambda)(-12-\lambda) - 8\cdot(-5) =$$

$$= -120 - 10\lambda + 12\lambda + \lambda^2 + 40 =$$

$$= \lambda^2 + 2\lambda - 80 = 0 \text{ om}$$

$$\lambda = -1 \pm \sqrt{1+81} = -1 \pm 9$$

så $\boxed{\lambda_1 = 8,\ \lambda_2 = -10.}$

Motsvarande egenvektorer behövs också!

$\underline{\lambda_1 = 8}$:
$$\left(\begin{array}{cc|c} 10-8 & -5 & 0 \\ 8 & -12-8 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & -5 & 0 \\ 8 & -20 & 0 \end{array}\right)$$

~~med lösn.~~ egenv.: $c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = -10}$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 10+10 & -5 & 0 \\ 8 & -12+10 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{cc|c} 20 & -5 & 0 \\ 8 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

med egenvektorer $c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$.

Vi får nu enligt allmän teori att

$\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}e^{8t}$ och $\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}e^{-10t}$ är en

fundamental mängd av lösn. och att allmänna lösn. kan skrivas på formen

$$\mathbb{X} = c_1\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}e^{8t} + c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}e^{-10t}.$$

Kolla!

$$\mathbb{X}' = c_1\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}\cdot 8e^{8t} + c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}(-10)e^{-10t}$$

$$A\mathbb{X} = c_1\overbrace{A\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}}^{8\binom{5}{2}}e^{8t} + c_2\overbrace{A\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}}^{-10\binom{1}{4}}e^{-10t} =$$

$$= c_1\cdot 8\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}e^{8t} - 10c_2\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}e^{-10t}$$

lika!

8.2 7)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - z \\ \frac{dy}{dt} = 2y \\ \frac{dz}{dt} = y - z \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{X' = AX}$$

Egenvärden till A:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (1-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) =$$

$$= -(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1) \text{ så } \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = -1 \end{cases}$$

$\underline{\lambda_1 = 1}$. Egenvektor sökes!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right)$$

med lösn. $c_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_2 = 2}$. Egenvektor sökes!

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

med lösn. $c_2\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$.

$\underline{\lambda_3 = -1}$. Egenvektor sökes!

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ \cancel{0} & \cancel{3} & \cancel{0} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

med lösn. $c_3\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$.

Sv: Allmänna lösn är $X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3$,

där

$$\begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} e^{t} \\ X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} e^{t}. \end{cases}$$

21)
$$X' = \overbrace{\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}}^{A} X .$$

Finn den allmänna lösn.!

<u>Egenvärden till A.</u>

$$0 = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-1-\lambda)(5-\lambda) - 3\cdot(-3) = -5+\lambda-5\lambda+\lambda^2+9 =$$

$= \lambda^2 - 4\lambda + 4$ har rötter

$\lambda = 2 \pm \sqrt{4-4} = 2$ dubbelrot.

<u>Egenvektorer till $\lambda=2$</u>

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$ ger egenvektorer $c_1 \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$.

vi behöver dessutom en lösn till. K_1

Vi har i alla fall hittat

$X_1 = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{=K_1} e^{2t}$ som är en lösning till $X' = AX$.

För att hitta en lösn. till, så söker vi den på formen

$$X_2 = K_1 t e^{2t} + P_1 e^{2t}$$ där K_1, P_1 är vektorer

$$X_2' = K_1(te^{2t})' + P_1(e^{2t})' =$$

$$= K_1(2te^{2t}+e^{2t}) + P_1 \cdot 2e^{2t} = AX_2$$ önskas.

dvs
$$K_1(2te^{2t}+e^{2t}) + P_1 \cdot 2e^{2t} = \underbrace{AK_1}_{=2K_1} te^{2t} + AP_1 e^{2t}$$
$$= 2K_1 te^{2t} + AP_1 e^{2t}$$

dvs $K_1 \cdot e^{2t} + 2P_1 e^{2t} = AP_1 e^{2t}$

dvs $K_1 + 2P_1 = AP_1$

dvs $(A - 2I)P_1 = K_1$.

så vi löser alltså P_1 ur

$$\left(\begin{array}{cc|c} -3 & 3 & 1 \\ \cancel{-3} & \cancel{3} & \cancel{1} \end{array}\right)$$ en lösn. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} = P_1$

så att

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} e^{2t}$$

fungerar. Allmänna lösn. blir

$$X = C_1 X_1 + C_2 X_2 =$$

$$= c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t e^{2t} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \end{pmatrix} e^{2t} \right],$$

där c_1, c_2 är konstanter.

35)
$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 5x + y \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + 3y \end{cases}$$

Finn allmän lösn!

$$\bar{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \text{DE } \bar{X}' = A\bar{X}.$$

Egenvärden till A.

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 1 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(3-\lambda) - 1\cdot(-2) =$$

$$= 15 - 5\lambda - 3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 8\lambda + 17.$$

$$\lambda = 4 \pm \sqrt{16-17} = 4 \pm i.$$

$\lambda_1 = 4+i$: Egenvektor sökes!

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5-(4+i) & 1 & 0 \\ -2 & 3-(4+i) & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1-i & 1 & 0 \\ -2 & -1-i & 0 \end{array}\right)$$

$$C_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} \text{ är egenvektor.}$$

ger lösn.
$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} e^{(4+i)t}$$

Av symmetriskäl är också

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} e^{(4-i)t} \text{ en lösn.}$$

Skriv $K_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix}$, och bilda

$$\begin{cases} B_1 = \frac{1}{2}(K_1 + \bar{K}_1) = \frac{1}{2}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}\right) = \\ = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ B_2 = \frac{i}{2}(-K_1 + \bar{K}_1) = \frac{i}{2}\left(-\begin{pmatrix} -1 \\ 1-i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix}\right) = \\ = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Enligt Sats 8.2.3 är en allmän reell lösn.

$$\mathbf{X} = c_1 \mathbf{X}_1 + c_2 \mathbf{X}_2, \text{ där } c_1, c_2 \text{ reella konst.}$$

och

$$\begin{cases} \mathbf{X}_1 = (B_1 \cos t - B_2 \sin t) e^{4t} \\ \mathbf{X}_2 = (B_2 \cos t + B_1 \sin t) e^{4t}. \end{cases}$$

37) $$\bar{X}' = \overbrace{\begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}}^{A} \bar{X}$$

Egenv. till A

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-4-\lambda)-5\cdot(-5)$$
$$= -16-4\lambda+4\lambda+\lambda^2+25 = \lambda^2+9$$

med rötter $\lambda = \pm 3i$.

Egenvektorer. $\lambda = 3i$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-3i & -5 & 0 \\ 5 & -4-3i & 0 \end{array}\right) \quad \text{lösn. } c_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}.$$

K_1

Detta ger lösningen $\begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix} e^{3it}$ och

av symmetriskäl är även $\begin{pmatrix} 5 \\ 4+3i \end{pmatrix} e^{-3it}$ en lösn.

Enl. Sats 8.2.3. får vi reella lösn. $\bar{X} = c_1\bar{X}_1 + c_2\bar{X}_2$

ur
$$\begin{cases} \bar{X}_1 = B_1 \cos 3t - B_2 \sin 3t \\ \bar{X}_2 = B_2 \cos 3t + B_1 \sin 3t \end{cases}$$

där $B_1 = \frac{1}{2}(K_1+\bar{K}_1) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ och $B_2 = \frac{i}{2}(-K_1+\bar{K}_1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$.

8.3 15)

$$\bar{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \bar{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t}_{F(t)}$$

Parameter-variation

$$X = \Phi(t) \int [\Phi(t)]^{-1} F(t)\,dt$$

där $F(t) = \begin{pmatrix} +1 \\ -1 \end{pmatrix} e^t$.

$\Phi(t)$ bildas av fundamentallösningarna till homogena ekv.

Hur går det till?

$\bar{X} = \Phi(t) U(t)$ leta efter $U(t)$ (kolonnvektor)

$\Phi(t)$ 2x2 matris med $\Phi'(t) = A\Phi(t)$.

$$\bar{X}' \overset{\text{prod regeln}}{=} \underbrace{\Phi'(t)}_{A\Phi(t)} U(t) + \Phi(t) U'(t)$$

$\bar{X}' - A\bar{X} = F$ är vår ekv. :

$$-AX = \cancel{A\Phi(t)U(t)} + \Phi(t)U'(t) - \cancel{A\Phi(t)U(t)} = F(t)$$

$$\Phi(t)\,U'(t) = F(t)$$

$$U'(t) = [\Phi(t)]^{-1} F(t)$$

$$U(t) = \int [\Phi(t)]^{-1} F(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \boxed{X = \Phi U = \Phi(t) \int [\Phi(t)]^{-1} F(t)\,dt}$$

Vi behöver bilda $\underline{\Phi}(t)$.

Egenv. till A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 2 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= -\lambda(3-\lambda) - 2\cdot(-1) = -3\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 3\lambda + 2$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-2) \quad \text{så egenv} \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 2 \end{cases}.$$

$\lambda_1 = 1$ Egenvektorer sökes!

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \quad \text{egenvektor} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 2$ Egenvektor sökes!

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \text{egenvektor} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t}, \quad \underline{X}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t}$$

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix}$$ (19)

$$[\Phi(t)]^{-1} = ? = \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix}$$ efter lite räkning.

$$X(t) = \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} e^{-t} & -e^{-t} \\ -e^{-2t} & 2e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{t}\, dt$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix} \int \begin{pmatrix} 2 \\ -3e^{-t} \end{pmatrix} dt =$$

$$= \begin{pmatrix} 2e^{t} & e^{2t} \\ e^{t} & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2t + c_1 \\ 3e^{-t} + c_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 4te^{t} + 3e^{t} + 2c_1e^{t} + c_2e^{2t} \\ 2te^{t} + 3e^{t} + c_1e^{t} + c_2e^{2t} \end{pmatrix}$$

31) $$\mathbf{X}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}}_{A} \mathbf{X} + \underbrace{\begin{pmatrix} 4e^{2t} \\ 4e^{4t} \end{pmatrix}}_{F(t)}$$

$$\mathbf{X}(0) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}_0}$$

$$\mathbf{X}(t) = \Phi(t)\left[\Phi(0)\right]^{-1}\mathbf{X}_0 + \Phi(t)\int_0^t \left(\Phi(s)\right)^{-1} F(s)\,ds$$

Skall användas!

Egenv. till A:

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 - (-1)^2 =$$

$$= (\lambda-3)^2 - 1^2 =$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-4)$$

Så egenvärdena är $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 4$.

Egenvektorer $\lambda_1 = 2$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3-2 & -1 & 0 \\ -1 & 3-2 & 0 \end{array}\right) \text{ egv. } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 4$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \text{ egv. } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

21

$$\begin{cases} X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{2t} \\ X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} e^{4t} \end{cases} \text{ gọi } \Phi(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix}$$

sử dụng $[\Phi(t)]^{-1} = \dfrac{1}{-2e^{6t}} \begin{pmatrix} -e^{4t} & -e^{4t} \\ -e^{2t} & e^{2t} \end{pmatrix} =$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2t} & e^{-2t} \\ e^{-4t} & -e^{-4t} \end{pmatrix} \quad \text{sử dụng}$$

$$X(t) = \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$+ \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \int_0^t \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^{-2s} & e^{-2s} \\ e^{-4s} & -e^{-4s} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4e^{2s} \\ 4e^{4s} \end{pmatrix} ds$$

$$= \begin{pmatrix} e^{2t} & e^{4t} \\ e^{2t} & -e^{4t} \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \int_0^t \begin{pmatrix} 4 + 4e^{2s} \\ 4e^{-2s} - 4 \end{pmatrix} ds \right]$$