Ö6

1

10.1 5, 15, 19, 25

10.2. 1, 7, 13, 19

10.3. 1, 7, 13, 17, 25, 31

10.1 : 5) $x'' + x = \varepsilon x^3$ ($\varepsilon > 0$ antas).

blir systemet $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + \varepsilon x_1^3. \end{cases}$

Kritiska punkter: $\begin{cases} x_2 = 0 \\ \underbrace{-x_1 + \varepsilon x_1^3}_{-x_1(1-\varepsilon x_1^2)} = 0 \end{cases}$

tre krit. punkter $\begin{cases} (x_1, x_2) = (0,0) \\ (x_1, x_2) = \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right) \\ (x_1, x_2) = \left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right) \end{cases}$

$x_1 = \pm \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$

5)
$$\begin{cases} x' = x(1-x^2-3y^2) \\ y' = y(3-x^2-3y^2) \end{cases}$$

Finn alla kritiska punkter!

$$\begin{cases} x(1-x^2-3y^2) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ eller } x^2+3y^2=1 \\ y(3-x^2-3y^2) = 0 \Leftrightarrow y=0 \text{ eller } x^2+3y^2=3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{matrix} x^2+3y^2=1 \\ \text{och} \\ x^2+3y^2=3 \end{matrix}\right\} \text{kan inte inträffa samtidigt!}$$

~~TRE~~ (FYRA) ALTERNATIV således:

$$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=0 \\ x^2+3y^2=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ y=0 \end{cases} \qquad \cancel{\begin{cases} x^2+3y^2=1 \\ x^2+3y^2=3 \end{cases}}$$

$(0,0)$

$3y^2=3$

$y=\pm 1$

$(0,1)$ & $(0,-1)$

$(1,0)$ & $(-1,0)$

Fem ~~Fyra~~ kritiska punkter: $(0,0)$, $(0,1)$, $(0,-1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$.

19)

$$\begin{cases} x' = 4x - 5y \\ y' = 5x - 4y \end{cases} \qquad \underline{X} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}$$

<u>Egenvärden</u> $\det\begin{pmatrix} 4-\lambda & -5 \\ 5 & -4-\lambda \end{pmatrix} = (4-\lambda)(-4-\lambda) - 5(-5)$

$$= -16 + \lambda^2 + 25 = \lambda^2 + 9$$

$\lambda = \pm 3i$ rent imaginärt ~~egenvärde~~ egenvärde

(ger periodiska lösn.!)

<u>Egenvektor</u> $\lambda_1 = 3i$.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 4-3i & -5 & 0 \\ \cancel{5} & \cancel{-4-3i} & \cancel{0} \end{array}\right)$$ beroende ekv.

$$K_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}$$ ger komplex lösning

$$K_1 e^{3it} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4-3i \end{pmatrix}(\cos 3t + i \sin 3t) = \begin{pmatrix} 5\cos 3t + i 5\sin 3t \\ 4\cos 3t + 3\sin 3t + i(4\sin 3t - 3\cos 3t) \end{pmatrix}$$

Reella lösn. fås ur real & imaginärdelar av den komplexa lösn.

Således:

$$\tilde{X}_1 = \begin{pmatrix} 5\cos 3t \\ 4\cos 3t + 3\sin 3t \end{pmatrix} \text{ och}$$

$$\tilde{X}_2 = \begin{pmatrix} 5\sin 3t \\ 4\sin 3t - 3\cos 3t \end{pmatrix} \text{ är reella lösn.,}$$

(a) och alla andra lösn. är på formen

$X = C_1 \tilde{X}_1 + C_2 \tilde{X}_2$, där C_1, C_2 är konstanter.

(b) $X(0) = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ begynnelsevillkor.

enligt ovan $\tilde{X}_1(0) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\tilde{X}_2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$,

och vi löser

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = X(0) = C_1 \tilde{X}_1(0) + C_2 \tilde{X}_2(0) = C_1 \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 5C_1 = 4 & \Rightarrow C_1 = 4/5 \\ 4C_1 - 3C_2 = 5 & \Rightarrow 3C_2 = 4C_1 - 5 = \frac{16}{5} - 5 = -\frac{9}{5} \end{cases}$$

$$C_2 = -3/5$$

så att $X(t) = \frac{4}{5}\tilde{X}_1(t) - \frac{3}{5}\tilde{X}_2(t) = \begin{pmatrix} 4\cos 3t \\ \frac{16}{5}\cos 3t + \frac{12}{5}\sin 3t \end{pmatrix}$

$$- \begin{pmatrix} 3\sin 3t \\ \frac{12}{5}\sin 3t - \frac{9}{5}\cos 3t \end{pmatrix}$$

och $\underline{X}'(t) = \begin{pmatrix} 4\cos 3t - 3\sin 3t \\ 5\cos 3t \end{pmatrix}$ är lösn.

Lösningen är första periodisk.

25) $\begin{cases} x' = -y + x(1-x^2-y^2) \\ y' = x + y(1-x^2-y^2) \end{cases}$

Vi byter till polära koordinater (r, θ) istället!

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{r}\left(x(-y+x(1-r^2)) + y(x+y(1-r^2))\right) \\ \quad = \frac{1}{r}\left(\cancel{-xy} + x^2(1-r^2) + \cancel{xy} + y^2(1-r^2)\right) = \\ \quad = \frac{1}{r}\left((x^2+y^2)(1-r^2)\right) = \frac{1}{r}(r^2(1-r^2)) = r(1-r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{r^2}\left(-y(-y+x(\overbrace{1-x^2-y^2}^{1-r^2})) + x(x+y(1-r^2))\right) \\ \quad = \frac{1}{r^2}\left(+y^2 - \cancel{xy(1-r^2)} + x^2 + \cancel{xy(1-r^2)}\right) = \frac{1}{r^2}(x^2+y^2) = 1 \end{cases}$$

$\frac{d\theta}{dt} = 1$ ger $\theta = t + C_1$

$\frac{dr}{dt} = r' = r - r^3$ Bernoulli ekv. $u = r^{-2}$ subst.

$u' = -2r^{-3}r' = -2r^{-3}(r - r^3) =$

$= -2r^{-2} + 2 = -2u + 2$

$u' + 2u = 2 \quad$ IF :

$$\underbrace{(u' + 2u)\, e^{2t}}_{(u e^{2t})'} = 2e^{2t}$$

$$u e^{2t} = \int 2e^{2t}\, dt = e^{2t} + C_2$$

$$u = 1 + C_2 e^{-2t}$$

$$r = \pm \frac{1}{\sqrt{1 + C_2 e^{-2t}}}$$

Μαν $r \geq 0$ αυτά, ότι

$$\begin{cases} r = \dfrac{1}{\sqrt{1 + C_2 e^{-2t}}} \\ \theta = t + C_1 \end{cases}$$

7

0.2 : 1)

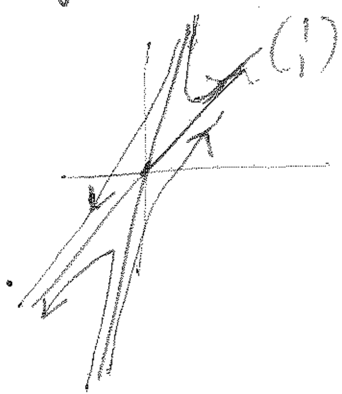
$$A = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{-6t}.$$

Lösningarna konvergerar mot origo $(0,0)$ då $t \to +\infty$. <u>Stabil nod</u> $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

7) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $\underline{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} e^{-t}$

<u>Sadelpunkt</u>



13)

$$x' = -\frac{3}{2}x + \frac{1}{4}y$$

$$y' = -x - \frac{1}{2}y$$

$$A = \begin{pmatrix} -3/2 & 1/4 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\tau = -3/2 - \frac{1}{2} = -2 < 0$$

$$\Delta = (-3/2)(-1/2) - \frac{1}{4}(-1) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$$

$$\tau^2 - 4\Delta = 4 - 4 \cdot 1 = 0$$

Degenererad stabil nod

Eftersom $\tau < 0$ och $\tau^2 - 4\Delta = 0$.

D.3 1)

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y + y^2 \\ y' = \beta x + \alpha y - xy \end{cases}$$

(0,0) är en kritisk punkt.

(y^2 & xy är andragradstermer så linjäriserade systemet är

$$\begin{cases} x' = \alpha x - \beta y \\ y' = \beta x + \alpha y \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$)

polära koordinater:

$$r' = \frac{1}{r}\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{r}\left(x(\alpha x - \beta y + y^2) + y(\beta x + \alpha y - xy)\right)$$

$$= \frac{1}{r}\left(\alpha x^2 - \cancel{\beta xy} + \cancel{\beta xy} + \alpha y^2 \cancel{+ xy^2} \cancel{- xy^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{r}\left(\alpha(x^2+y^2)\right) = \alpha r$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \theta' = \frac{1}{r^2}\left(-y\frac{dx}{dt} + x\frac{dy}{dt}\right) = \frac{1}{r^2}\left(-y(\alpha x - \beta y + y^2)\right.$$

$$\left. + x(\beta x + \alpha y - xy)\right) = \frac{1}{r^2}\left(\cancel{-\alpha xy} + \beta y^2 - y^3 + \beta x^2 \cancel{+ \alpha xy} - x^2 y\right) =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left(y^2(\beta - y) + x^2(\beta - y)\right) = \frac{\beta - y}{r^2}(x^2+y^2) = \beta - y$$

$$= \beta - r\sin\theta$$

Om $\alpha > 0$ så får vi en instabil krit. punkt

Om $\alpha \leq 0$ stabil krit punkt.

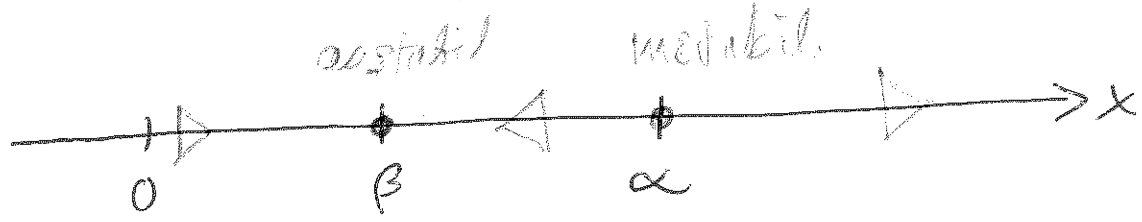
Om $\alpha < 0$ as. stabil.

10,3: 7) $\frac{dx}{dt} = k(\alpha - x)(\beta - x)$ $\left(\begin{matrix} \alpha, \beta > 0 \\ k > 0 \\ \alpha > \beta \end{matrix} \right.$

Kritiska punkter:

$k(\alpha - x)(\beta - x) = 0$ dvs $\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta. \end{cases}$ och

Teckenstudium av $k(\alpha - x)(\beta - x)$



$+ + + + + \; 0 \; - - - \; 0 \; + + ++$ $k(\alpha - x)(\beta - x)$

---

25) $x'' + x = \varepsilon x^3$ ($\varepsilon > 0$ antas)

Ekvivalent system: $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -x_1 + \varepsilon x_1^3 \end{cases}$

Kritiska punkter $(0,0)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right)$, $\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right)$.

$(0,0)$: linearisering $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Delta = \det A = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) = 1$, $\tau = \operatorname{tr} A = 0$.
någon sorts spiral, oklart om stabil/instabil

$\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right)$: linearisering $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1+3\varepsilon x_1^2 & 0 \end{pmatrix}\Bigg|_{x_1=\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}} =$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Delta = \det A = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = -2 < 0$

$\tau = \operatorname{tr} A = 0$

sadelpunkt!

$\left(-\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, 0\right)$: pss sadelpunkt!