$\boxed{\text{Ö}8}$

1

12.1 3, 7, 13, 28

12.2 3, 9, 11

12.3 1, 5

12.4 7, 14, 17

12.5 11

---

1 b) $\boxed{\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial u}{\partial y}}$ (Enkla uppgiften [illegible]!)

Vi letar efter produktlösningar $u = X Y$, där $X = X(x)$ och $Y = Y(y)$.

$u'_x = X' Y$, $u'_y = X Y'$, så att PDE blir

$$X' Y = X Y' \iff \frac{X'}{X} = \frac{Y'}{Y} = \lambda = \text{konstant}$$

så att $X = C_1 e^{\lambda x}$, $Y = C_2 e^{\lambda y}$ och

$u = X Y = C_3 e^{\lambda(x+y)}$ där $C_3 = C_1 C_2$.

7) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

produktlösn. $u = X Y$, där $X = X(x)$ och $Y = Y(y)$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = X'' Y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = X' Y', \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = X Y''.$$

PDE: $$X'' Y + X' Y' + X Y'' = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{X'}{X} \frac{Y'}{Y} + \frac{Y''}{Y} = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{X'}{X} \cdot \frac{Y'}{Y}}_{g_1(x) g_2(y)} = -\frac{X''}{X} - \frac{Y''}{Y} = f_1(x) + f_2(y)$$

ska gälla för alla x, y! Detta är nog bara möjligt om g_1, g_2, f_1, f_2 är konstanta, dvs

$$\frac{X'}{X} = \lambda_1, \quad \frac{Y'}{Y} = \lambda_2, \quad \frac{X''}{X} = \mu_1, \quad \frac{Y''}{Y} = \mu_2,$$

där $\boxed{\lambda_1 \lambda_2 = -\mu_1 - \mu_2}$.

3

$X' = \lambda_1 X$ har lösningen $X = C_1 e^{\lambda_1 x}$.

$Y' = \lambda_2 Y$ har lösningen $Y = C_2 e^{\lambda_2 y}$.

Då blir

$$\begin{cases} X'' = (\lambda_1 X)' = \lambda_1 X' = \lambda_1^2 X \quad \text{så } \mu_1 = \lambda_1^2 \\ Y'' = (\lambda_2 Y)' = \lambda_2 Y' = \lambda_2^2 Y \quad \text{så } \mu_2 = \lambda_2^2. \end{cases}$$

Vi stoppar in:

$$\lambda_1 \lambda_2 = -(\mu_1 + \mu_2) = -\lambda_1^2 - \lambda_2^2$$

dvs $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_1 \lambda_2 = 0.$

Dela med λ_2^2: $\quad \dfrac{\lambda_1^2}{\lambda_2^2} + 1 + \dfrac{\lambda_1}{\lambda_2} = 0$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} + 1 = 0$$

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - 1} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

alt. $\lambda_2 = 0$: $\lambda_1^2 = 0$ dvs $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{cases}\lambda_1 = \left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\tau \\ \lambda_2 = \tau\end{cases}$$

parametriserad lösn.

~~Alltså~~ $u = XY = C_3 \, e^{\lambda_1 x + \lambda_2 y}$

$= C_3 e^{\left(-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\tau x + \tau y}$

parametriserad produktlösn.

här tillåts τ vara komplext ($\tau \in \mathbb{C}$).

Observera att i facit betraktas uppgiften som ej separabel vilket förklarar den krångliga lösningen.

13) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$u = XY$, där $X(x)$, $Y(y)$, ansätts.

Då blir PDE:

$X''Y + XY'' = 0$

$\Leftrightarrow \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y} = 0 \Leftrightarrow \frac{X''}{X} = -\lambda$,

$\frac{Y''}{Y} = \lambda$ för ngn konstant λ (!!).

$X'' = -\lambda X$ har lösning $X = C_1 e^{\sqrt{-\lambda}\, x} + C_2 e^{-\sqrt{-\lambda}\, x}$

Pss $Y'' = \lambda Y$ har lösn. $Y = C_3 e^{\sqrt{\lambda}\, y} + C_4 e^{-\sqrt{\lambda}\, y}$

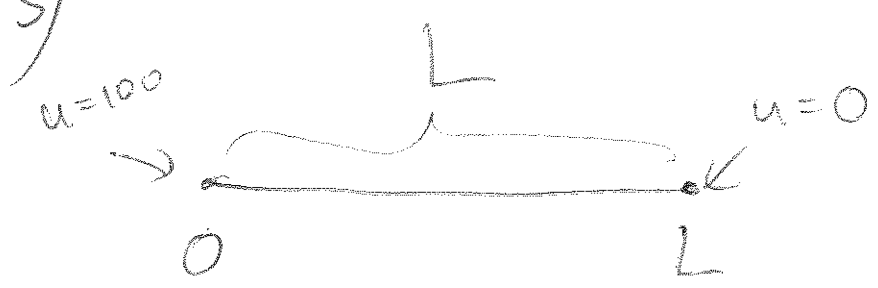
vilket ger produktlösn. av typen

konstant gånger $e^{\sqrt{-\lambda}\, x + \sqrt{\lambda}\, y}$,

$e^{\sqrt{-\lambda}\, x - \sqrt{\lambda}\, y}$, $e^{-\sqrt{-\lambda}\, x + \sqrt{\lambda}\, y}$, $e^{-\sqrt{-\lambda}\, x - \sqrt{\lambda}\, y}$.

Obs! Någon av $\sqrt{\lambda}$ och $\sqrt{-\lambda}$ är komplex.

12.2 3)



f(x) initial temperatur.

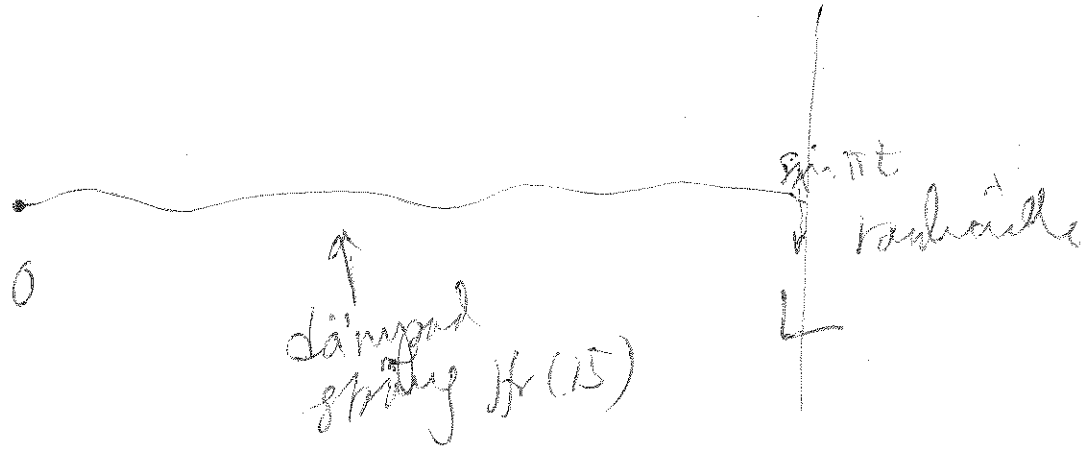
Värmeledningsekvationen

$$\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & (k>0 \text{ konstant}) \\ u(x,0) = f(x) & \text{begynnelsevärde} \\ u(0,t) = 100 & \text{randvärde} \\ \cancel{u(L,t) = 0} & \cancel{\text{randvärde}} \end{cases}$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=L} = \overset{\text{konst.}}{h}\, u(L,t), \quad t>0.$$

dvs bara långsam förlust
i x=L.

9) Sträng av längd L.



$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\beta \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \text{ för } 0<x<L,\ t>0$$

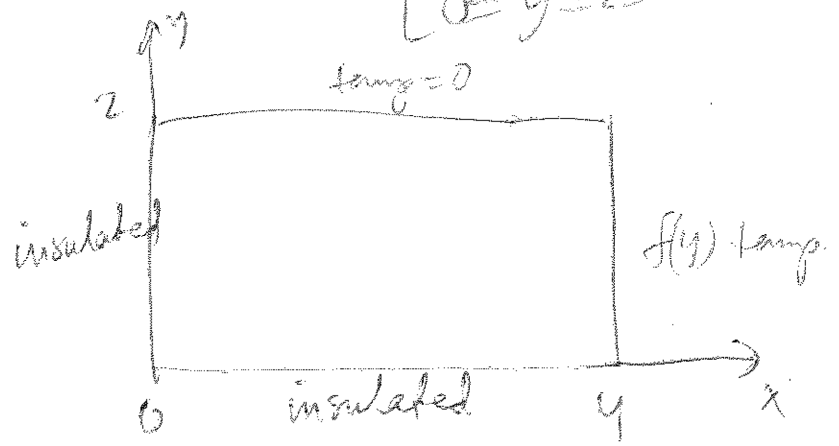
$u(0,t)=0$ (fixerad ände)

$u(L,t)=\sin(\pi t)$ flyttande ände

$u(x,0)=f(x)$ initialposition

$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$ at rest at initial position

11) steady-state temperature of a plate, $u(x,y)$. Plate is $\begin{cases} 0 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 2. \end{cases}$



$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0}$$ Laplaces ekv för steady state

Randdata:

$$\left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial y}(x,0) = 0, & \text{om } 0 \le x \le 4 \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial x}(0,y) = 0, & \text{om } 0 \le y \le 2. \\[2ex] u(x,2) = 0, & 0 \le x \le 4 \\ u(4,y) = f(y), & 0 \le y \le 2. \end{array}\right\} \text{randdata}$$

9

12.3 1) $\begin{cases} k\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & \text{värmeledningsekvationen} \\ \left.\begin{array}{l} u(0,t)=0 \\ u(L,t)=0 \end{array}\right\} & \text{sidodata} \\ u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{om } 0<x<L/2 \\ 0 & \text{om } L/2<x<L \end{cases} & \text{initialdata} \end{cases}$

Vi hittar först variabelseparerade lösn.

$u = X\,T, \quad X(x),\ T(t).$

$$kX''T = XT' \Leftrightarrow \frac{kX''}{X} = \frac{T'}{T} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{X''}{X} = \lambda, \quad \frac{T'}{T} = k\lambda, \text{ där } \lambda \text{ är konstant.}$$

Vi vill att vår variabelseparerad lösn. ska uppfylla sidodata: detta motsvarar att

$$\begin{cases} X(0)=0 \\ X(L)=0 \end{cases}$$

$X'' = \lambda X$ har lösn.

$$X = C_1 e^{\sqrt{\lambda}x} + C_2 e^{-\sqrt{\lambda}x}$$

och om $\lambda > 0$ så $\left.\begin{matrix} X(L)=0 \\ X(0)=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = 0 \\ C_2 = 0 \end{cases}$

så vi får ingen intressant lösn.

Om $\lambda \leq 0$ då? $\lambda = -\omega^2$ säger vi, där $\omega \geq 0$.

Då skriver vi lösn. till $X'' = -\omega^2 X$

på formen

$$X = C_3 \cos(\omega t) + C_4 \sin(\omega t).$$

Vi stoppar in $X(0) = 0 \Rightarrow C_3 = 0$.

Vi stoppar in $X(L) = 0$: $X(L) = C_4 \sin(\omega L) = 0$

vilket ger icke-trivial lösn. bara då

$\boxed{\sin(\omega L) = 0}$ dvs $\boxed{\omega L = n\pi, \text{ n heltal } (n \geq 0)}$

Så $\omega = \frac{n\pi}{L}$ och vi kan välja $C_4 = 1$:

$\boxed{X(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)}$, n heltal ≥ 0.

Vi behöver också T:

$$T' = k\lambda T = -k\omega^2 T = -k\frac{n^2\pi^2}{L^2}T$$

och den ekvationen har lösn.

$$T = C_5 e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}.$$ Vi väljer $C_5 = 1$, så

att $$T = e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}$$

och får den variabelseparerade lösn.

$$u = XT = e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right).$$

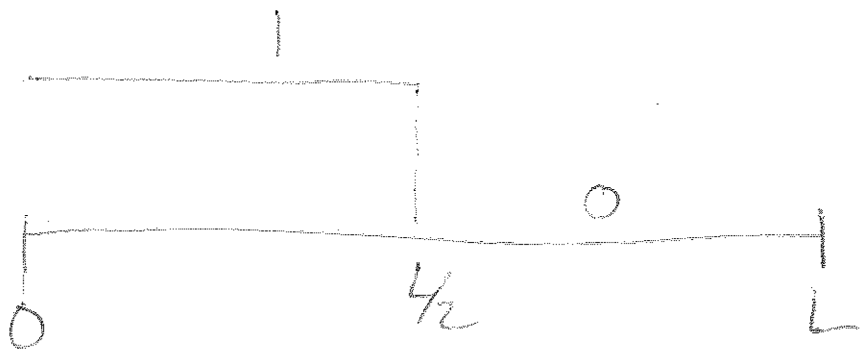
För att nu lösa PDEn så använder vi superpositionsprincipen och bildar

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L^2}t}\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$ där

A_n är konstanter. Då blir sidodata uppfyllda, och vi behöver nu bara fixa begynnelsedata.

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) = \begin{cases} 1 \text{ om } 0<x<L/2 \\ 0 \text{ om } L/2<x<L. \end{cases}$$

Vår randfunktion



har en sinusserie enl. [BETA s. 313]:

$$A_n = \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n}$$

Så lösningen blir:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{1-\cos(n\pi/2)}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) e^{-k\frac{n^2\pi^2}{L}t}$$

Eftersom $\cos\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} 1 & \text{om } n = 4k \\ -1 & \text{om } n = 4l+2 \\ 0 & \text{om } n = 4l+1 \text{ eller } n = 4l+3 \end{cases}$

så försvinner vissa av termerna!

2.4 7)

Lös.
$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(0,t) = 0 \\ u(L,t) = 0 \\ u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < L/2 \\ 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & \frac{L}{2} \le x \le L. \end{cases} \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Enligt variabelsep.-metoden och superpositionsprincipen skriver vi u på form

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\left(\frac{n\pi a}{L} t\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} ta\right) \right) \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

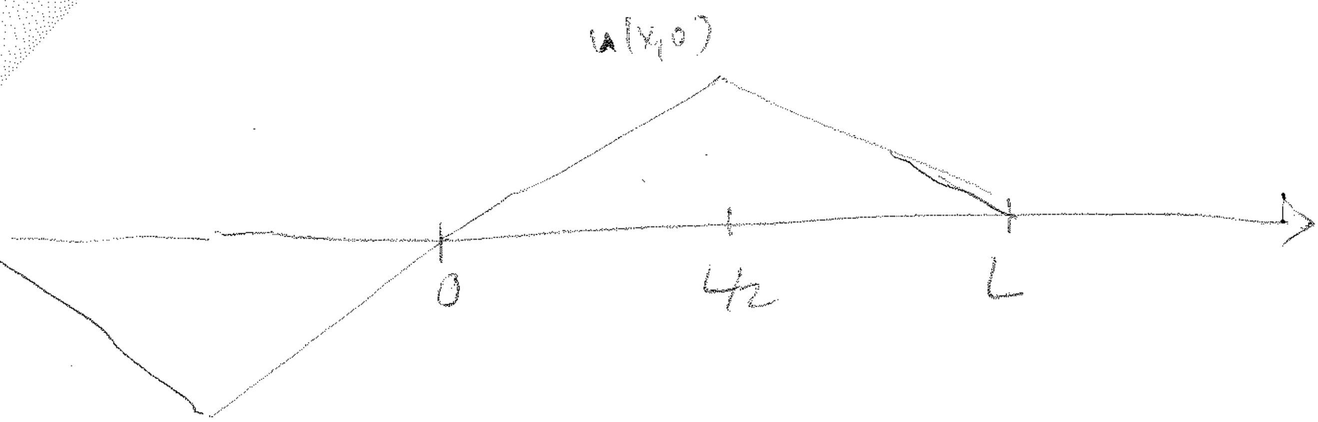
Då är

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) = \begin{cases} \dfrac{2hx}{L}, & 0 < x < L/2 \\ 2h\left(1 - \dfrac{x}{L}\right), & \frac{L}{2} < x < L. \end{cases}$$

och

$$\underbrace{\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}}_{=0 \text{ enl. uppg.}} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \frac{n\pi}{L} a \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right).$$

så $B_n = 0$ allihopa



Sinusserieutveckling av ovanstående våg

ger att

$$A_n = \frac{L}{n^2\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \quad \text{och lösningen blir}$$

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n^2\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\cos\left(\frac{n\pi a}{L}t\right)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

17)

$$\begin{cases} a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ u(x,0) = f(x) \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = g(x) \end{cases}$$

har d'Alemberts lösning

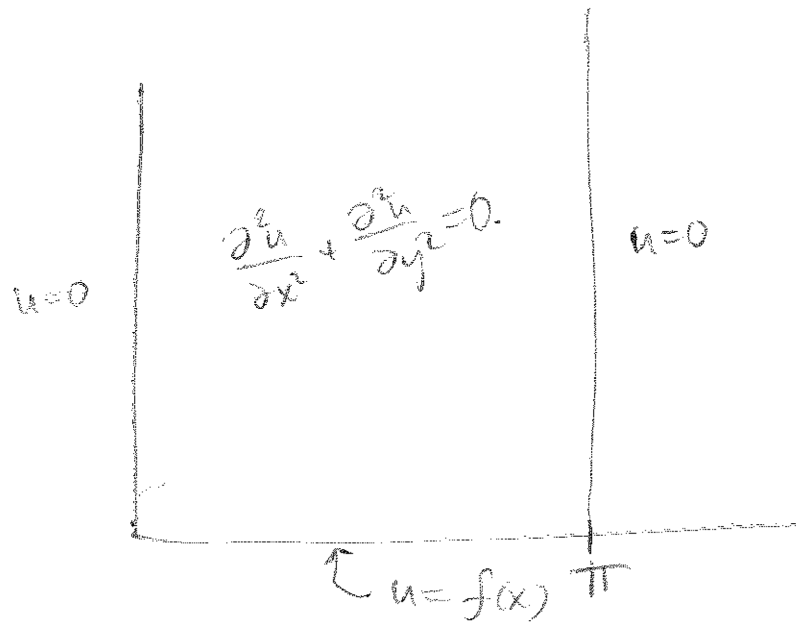
$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x+at) + f(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} g(s)\,ds.$$

Om $f(x)=0$, $g(x)=\sin(2x)$ så blir lösn.

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \sin(2s)\,ds = \frac{1}{2a}\left[-\frac{\cos 2s}{2}\right]_{x-at}^{x+at} =$$

$$= \frac{1}{4a}\left[\cos(2(x-at)) - \cos(2(x+at))\right].$$

125. 11)



Variabelseparerade lösn. först.

$u = XY$: $X''Y + XY'' = 0$.

$$\frac{X''}{X} = -\omega^2 \ , \ \frac{Y''}{Y} = \omega^2 \qquad (\omega \geq 0)$$

$$X = C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x$$

$X(0) = 0$, $X(\pi) = 0$.

$\Rightarrow C_1 = 0$ $\qquad C_2 \neq 0 \Rightarrow \sin \omega\pi = 0$ dvs $\omega = n$ heltal ≥ 0.

$X = \sin(nx)$.

välj $C_2 = 1$.

$$Y = D_1 e^{ny} + D_2 e^{-ny}.$$

Begränsning då $y \to +\infty$ kräver $D_1 = 0$.

Så vi väljer att

$$\begin{cases} X = \sin(nx) \\ Y = e^{-ny} \end{cases} \quad \text{ger } u_n = e^{-ny}\sin(nx)$$

och vi vill lösa m.h.a superposition:

$$\boxed{u = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-ny} \sin(nx)}$$

($n=0$ ointressant)

Koefficienterna A_n fås av

$$\boxed{A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin(nx)\,dx}$$