LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Analys 2
24 april 1997

Skrivtid 8–13

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Beräkna dubbelintegralen

$$\iint_D (2x-y)^2(x-2y)^2 dxdy,$$

där D betecknar parallellogrammen med hörn i $(0,0)$, $(-1,-2)$, $(3,0)$, och $(4,2)$.

2. Bestäm alla tangentplan till ytan $x^3 + 2y^2 + 3z = 4$ som är parallella med planet $3x + 2y + z = 0$.

3. Beräkna (den generaliserade) integralen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-x^2 - 2xy - 3y^2)\, dxdy.$$

4. Låt funktionen f vara definierad av

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} xe^{-nx^2}.$$

a) Summera serien och bestäm således $f(x)$ som en funktion av x.

b) Avgör om serien konvergerar likformigt på intervallet $[1, +\infty[$.

c) Avgör om serien konvergerar likformigt på intervallet $[0, 1]$.

5. Undersök om avbildningen

$$\begin{cases} y_1 &= x_1 + \sin(x_2 x_3) \\ y_2 &= 2x_2 + x_1 x_3 \\ y_3 &= e^{x_3} - 1 + x_1 x_2 \end{cases}$$

har en lokal invers nära $(0,0,0)$.

6. Antag att funktionen $u(t,x)$ är C^2 (dvs har kontinuerliga partiella derivator av ordning upp till och med 2) och löser värmeledningsekvationen $\partial_x^2 u = \partial_t u$ nära kurvan $(t, \sqrt{t})$, $t > 0$. Vi vet dessutom om u att $u(t, \sqrt{t}) = 1$ för $t > 0$ och att $\partial_x u(t, \sqrt{t}) = -(4t)^{-1/2}$, återigen för $t > 0$. Bestäm $\partial_x^2 u(t, \sqrt{t})$ för $t > 0$.