LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Analys 2
14 maj 1997

Skrivtid 8–13

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Beräkna den (generaliserade) integralen

$$\iint_D e^{-x^2y^4}\,dxdy,$$

där D betecknar strimlan i xy-planet $4 < y < 5$.

2. Finn maximum och minimum till $f(x,y) = e^{x+y}\sin(x-y)$ på området $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le \pi$.

3. Lös differentialekvationen

$$\partial_x^2 f - 4x\partial_{xy}^2 f + 4x^2\partial_y^2 f - 2\partial_y f = 0$$

genom att göra variabelbytet $(s,t) = (x^2+y, x)$. (Här är $\partial_{xy}^2 = \partial_x\partial_y$).

4. Visa att $x^3+y^3+z^3-2xyz = 1$ lokalt kring $(1,1,1)$ definierar z som en C^1-funktion av x och y. Bestäm också $\partial_x z$ och $\partial_y z$ i punkten $(x,y) = (1,1)$.

5. Låt funktionerna f_n vara definierade av

$$f_n(x) = nx\arctan\frac{1}{nx}.$$

a) Bestäm gränsfunktionen $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$.

b) Avgör om följden konvergerar likformigt på intervallet $]0,1]$.

c) Avgör om följden konvergerar likformigt på intervallet $[1,2]$.

d) Avgör om följden konvergerar likformigt på intervallet $[2,+\infty[$.

6. För vilka värden på de positiva konstanterna a, b, c, och d konvergerar den generaliserade trippelintegralen

$$\iiint_Q \frac{dxdydz}{x^a y^b z^c (1-x^2-y^2-z^2)^d},$$

där Q är området där följande olikheter gäller: $x^2+y^2+z^2 < 1$, $x > 0$, $y > 0$, och $z > 0$?