Repetitionsfrågor i Fourieranalys

Serier

1. För vilka reella tal a konvergerar serierna a) $\sum_{k=0}^{\infty} a^k$ b) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^a}$?

2. Formulera och bevisa en jämförelsesats för positiva serier.

3. Antag att $a_k > 0$ och att $\lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = q$. Vad kan då sägas om konvergensen av $\sum_0^{\infty} a_k$? Motivera!

4. Visa att för en positiv serie är summan oberoende av summationsordningen.

5. Hur definieras $\sum_I a_i$ om $a_i \geq 0$ och I är en godtycklig indexmängd?

6. Visa att med beteckningarna från fråga 5 gäller att

$$\sum_I a_i = \sum_{I_1} a_i + \sum_{I_2} a_i \quad \text{om} \quad I = I_1 \cup I_2 \quad \text{och} \quad I_1 \cap I_2 = \emptyset.$$

   Formulera och bevisa motsvarande påstående för en godtycklig uppdelning av I.

7. Vad menas med att en serie är absolutkonvergent och hur definieras dess summa?

8. Formulera och bevisa Leibniz' sats om alternerande serier.

9. Visa att serien $\sum\limits_0^{\infty} a_k x^k$ konvergerar absolut om $|x| < R$ och om följden $a_k R^k$ är begränsad.

10. Vad menas med att funktionsföljden $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergerar punktvis respektive likformigt på E?

11. Visa att om de kontinuerliga funktionerna $(f_j)_{j=1}^{\infty}$ konvergerar likformigt mot f så är f kontinuerlig.

12. Visa att $\int_E f_n \, dx \to \int_E f \, dx$ om $f_n \to f$ likformigt på det kompakta intervallet E.

13. Antag att de kontinuerligt deriverbara funktionerna f_n konvergerar punktvis mot f och att f_n' konvergerar likformigt mot g i ett intervall. Visa att då är f kontinuerligt deriverbar med $f' = g$ i intervallet.

14. Formulera och bevisa Weierstrass' majorantsats.

15. Ange villkor som garanterar att summan av en funktionsserie är kontinuerlig respektive deriverbar i ett intervall.

Fourierserier

1. Definiera Fourierkoefficienterna och Fourierserien för en 2π-periodisk Riemannintegrerbar funktion u.

2. Visa att funktionerna $e_n(x) = e^{inx}$ bildar ett ortonormerat system med avseende på skalärprodukten
$$(u, v) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(x)\overline{v(x)}\, dx\,.$$

3. Bevisa Bessels olikhet.

4. Visa att för varje 2π-periodisk Riemannintegrerbar funktion går Fourierkoefficienterna c_n mot noll då $|n| \to \infty$.

5. a) Vad menas med att en funktion u är styckvis C^1 på intervallet $[a, b]$? b) Vad menas med att en 2π-periodisk funktion u är styckvis C^1?

6. Visa att om u är en kontinuerlig, 2π-periodisk funktion som är styckvis C^1, så är $c_n(u') = inc_n(u)$.

7. Visa att om u är som funktionen i föregående fråga så är dess Fourierserie absolutkonvergent.

8. Formulera och bevisa inversionsformeln för Fourierserier.

9. Låt N vara ett givet positivt heltal och u en Riemannintegrerbar funktion på intervallet $[0, 2\pi]$. Visa att integralen
$$I(a) = \int_0^{2\pi} |u(x) - \sum_{-N}^{N} a_n e^{inx}|^2\, dx$$
är minst när talen a_n är Fourierkoefficienterna för u.

10. Visa att om u är som i föregående fråga med Fourierkoefficienter c_n så gäller att
$$\int_0^{2\pi} |u(x) - \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx}|^2\, dx \to 0 \quad \text{då} \quad N \to \infty.$$

11. Bevisa Parsevals formel.

12. Låt u vara kontinuerlig och styckvis C^1 på intervallet $[0, \pi]$. a) Visa att u kan utvecklas i en absolutkonvergent cosinusserie. b) Visa att om $u(0) = u(\pi) = 0$, så kan u även utvecklas i en absolutkonvergent sinusserie.

13. Hur ser motsvarigheterna till Parsevals formel ut för cosinus- och sinusserier på intervallet $[0, \pi]$?

14. Låt funktionen u vara kontinuerlig och styckvis C^1 på intervallet $[0, \pi/2]$ med $u(0) = 0$. Visa att u kan skrivas
$$u(x) = \sum_0^\infty b_k \sin{(2k+1)x}\,,$$
där $\sum_0^\infty |b_k| < \infty$.

Värmeledning och musik

1. Härled värmeledningsekvationen. (utgår)
2. Beskriv metoden med separation av variabler för värmeledningsekvationen.
3. Låt u vara en lösning till värmeledningsekvationen för $t > 0$ och $0 \leq x \leq \pi$, som är noll för $x = 0$ och $x = \pi$. Visa att u är entydigt bestämd av sina värden för $t = 0$.
4. Hur kan man framställa lösningarna till värmeledningsekvationen då man har randvillkoren a) $\partial_x u(0,t) = \partial_x u(l,t) = 0$? b) $u(0,t) = \partial_x u(l,t) = 0$?
5. Skissera härledningen av vågekvationen för en svängande sträng. (utgår)
6. Visa hur man med hjälp av Fourierserier kan lösa vågekvationen för givna begynnelsevärden och randvillkoren $u(0,t) = u(l,t) = 0$.
7. Härled d'Alemberts lösningsformel för vågekvationen på hela x-axeln.
8. Skissera hur man kan använda d'Alemberts formel för att lösa problemet i fråga 6.

Fouriertransformen

1. Hur definieras Fouriertransformen $\hat{u}$ av en funktion u och vilka förutsättningar måste u uppfylla för att definitionen skall vara meningsfull?
2. Visa att $\hat{u}$ är kontinuerlig och begränsad på $\mathbb{R}$ om u är kontinuerlig och integrerbar på $\mathbb{R}$.
3. Visa att om $u(x) = e^{-a|x|}$ $(a > 0)$ så är $\hat{u}(\xi) = \frac{2a}{a^2+\xi^2}$.
4. a) Skriv upp Fouriers inversionsformel och ange förutsättningar för att den skall vara giltig.

   b) Redogör för huvuddragen i beviset.

   c) Bevisa inversionsformeln.
5. Visa att om u är kontinuerlig, integrerbar och begränsad på $\mathbb{R}$ och om $\hat{u}$ är positiv så är $\hat{u}$ integrerbar över $\mathbb{R}$.
6. Låt u vara kontinuerlig och integrerbar på $\mathbb{R}$. Visa att

   a) om $f(x) = u(ax)$, där $a \neq 0$ är reellt, så är $\hat{f}(\xi) = \frac{1}{|a|}\,\hat{u}(\frac{\xi}{a})$.

   b) Om $f(x) = e^{-iax}u(x)$ så är $\hat{f}(\xi) = \hat{u}(\xi + a)$, om a är reellt.

   c) Om $f(x) = u(x + a)$ så gäller $\hat{f}(\xi) = e^{ia\xi}\hat{u}(\xi)$, a reellt.

   d) Om $xu(x)$ är integrerbar på $\mathbb{R}$ och $f(x) = -ixu(x)$ så är $\hat{u}$ en C^1 funktion och $\hat{u}'(\xi) = \hat{f}(\xi)$.

   e) om $f = u'$ är kontinuerlig och integrerbar på $\mathbb{R}$ så är $\hat{f}(\xi) = i\xi\hat{u}(\xi)$.

7. Visa att om $u(x) = e^{-ax^2}$ $(a > 0)$ så är $\hat{u} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\xi^2/4a}$.

8. Låt u och v vara kontinuerliga, integrerbara och begränsade funktioner på $\mathbb{R}$.

   a) Hur definieras faltningen $u * v$?

   b) Visa att funktionen $u * v$ är kontinuerlig, integrerbar och begränsad på $\mathbb{R}$.

   c) Visa att Fouriertransformen av $u * v$ är $\hat{u}\,\hat{v}$.

9. a) Skriv upp och ange förutsättningar för Plancherels formel.

   b) bevisa Plancherels formel.

10. Visa att om både u och u' är kontinuerliga, integrerbara och begränsade på $\mathbb{R}$ så är Fouriertransformen $\hat{u}$ integrerbar på $\mathbb{R}$.

11. a) Skriv upp begynnelsevärdesproblemet för värmeledningsekvationen i övre halvplanet.

    b) Skriv upp lösningsformeln för detta problem. Ange förutsättningarna på begynnelsevärdena $u(x, 0)$.

    c) Härled formeln i b).

    d) Visa att formeln ger en begränsad lösning till problemet och att det bara finns en begränsad lösning om begynnelsevärdena är begränsade.