Lunds Universitet

Matematikcentrum
Matematik MNF

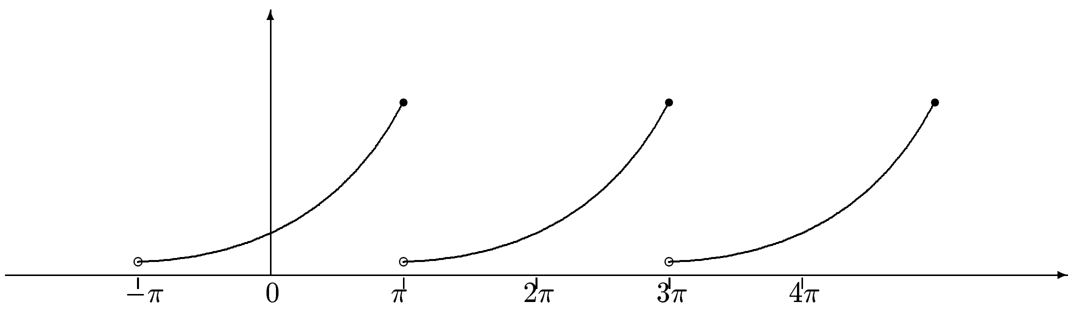
Tentamensskrivning
Fourieranalys
Måndagen 7 januari 2002, 8.00–13.00

LÖSNINGAR

1. *Låt $f(x) = e^x$ för $-\pi < x \leq \pi$, och utvidga funktionen periodiskt till en funktion på reella axeln med period 2π.*

(a) *Rita grafen till funktionen $f(x)$ på intervallet $[-4\pi, 4\pi]$.*

Vi ritar grafen på ett litet mindre intervall, men tror ni hänger med ändå. Ritprogrammet har sina begränsningar, men huvuddragen skall i alla fall synas.



(b) *Beräkna funktionens Fourierkoefficienter, och skriv upp Fourierserien för $f(x)$, både som en summa av komplexa exponentialfunktioner och som en summa av cosinus och sinus-funktioner.*

Funktionens Fourierkoefficienter blir

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\, e^{-inx}\, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x}\, dx = (-1)^n\,\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\,\frac{1}{1-in}$$

för varje heltal n. Vi får alltså Fourierserieutvecklingen

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx} = \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1-in}\, e^{inx}.$$

Genom att använda att $e^{inx} = \cos(nx) + i\sin(nx)$ så får vi representationen

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{+\infty} a_n\cos(nx) + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n\sin(nx),$$

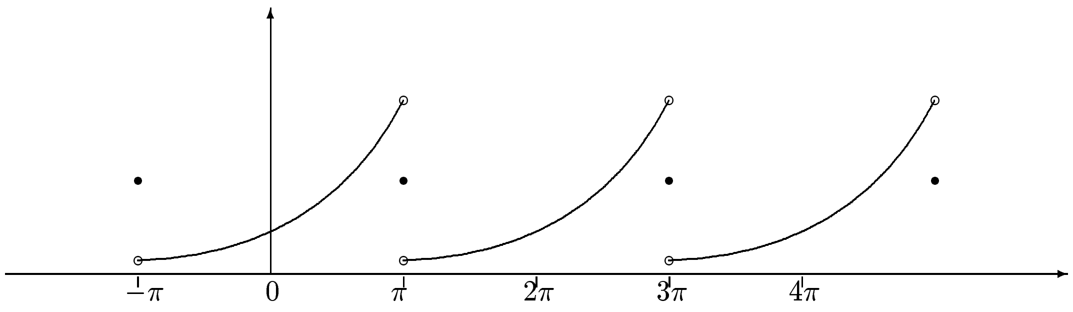
Var god vänd!

där

$$a_n = \frac{(-1)^n(e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}, \qquad b_n = \frac{(-1)^{n-1}(e^{\pi} - e^{-\pi})\, n}{\pi(1+n^2)}.$$

(c) *Beskriv grafen till Fourierseriens summa. Speciellt, vad blir summan för $x = 0$, $x = \pi$, och $x = -3\pi$?*

Grafen till Fourierseriens summa visas nedan.



Fourierseriens summa för $x = 0$ är $e^0 = 1$. I de andra punkterna får vi medelvärdena av höger- och vänstergränsvärdena, dvs $(e^{\pi} + e^{-\pi})/2$ i $x = \pi$ och $x = -3\pi$.

2. *Använd Fourieranalys för att visa att*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Du får själv välja funktion och lämplig identitet!

Lämpligen kan man här använda funktionen $f(x) = x$ på $]-\pi, \pi]$, utvidgad periodiskt, och tillämpa på denna Parsevals formel

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2,$$

där c_n är de komplexa Fourierkoefficienterna för f.
Alternativt kan man välja $f(x) = x^2$ på $]-\pi, \pi]$, utvidgad periodiskt, och använda att Fourierserien konvergerar mot funktionsvärdet i varje punkt (inga diskontinuiteter, ju!), speciellt i $x = \pi$.

3. *Bestäm Fouriertransformen av funktionerna*

(a) $f(x) = x^2\, e^{-x^2}$,

(b) $g(x) = \dfrac{4}{1 + 9x^2}$.

För (a) använder vi att Fouriertransformen av e^{-x^2} är $\sqrt{\pi}\, e^{-\xi^2/4}$ plus att derivatan av $\widehat{\varphi}(\xi)$ blir Fouriertransformen av $-ix\, f(x)$. Detta ger att

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sqrt{\pi}}{4}\,(2 - \xi^2)\, e^{-\xi^2/4}.$$

För (b) nyttjar vi att Fouriertransformen av $(1+x^2)^{-1}$ är $\pi\, e^{-|\xi|}$. Efter omskalning får vi således

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{4\pi}{3}\, e^{-|\xi|/3}.$$

4. *Finn Fouriertransformen till funktionen*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-3|y|}}{4+(x-y)^2}\, dy.$$

Vi ser att $f(x)$ är faltningen av funktionerna $e^{-3|x|}$ och $(4+x^2)^{-1}$. Enligt faltningssatsen är då

$$\widehat{f}(\xi) = \widehat{e^{-3|x|}}(\xi)\, \widehat{(4+x^2)^{-1}}(\xi),$$

och vi räknar ut att

$$\widehat{e^{-3|x|}}(\xi) = \frac{6}{9+\xi^2}$$

och

$$\widehat{(4+x^2)^{-1}}(\xi) = \frac{\pi}{2}\, e^{-2|\xi|}.$$

Resultatet blir

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{3\pi e^{-2|\xi|}}{9+\xi^2}.$$

5. *Lös värmeledningsproblemet*

$$\partial_t\, u(x,t) = 5\, \partial_x^2\, u(x,t)$$

för $t > 0$ *och* $0 < x < \pi$*, med begynnelsevärdet*

$$u(x,0) = \sin^2(x)\, \cos(3x), \qquad 0 < x < \pi,$$

och isolerade ändar, det vill säga

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty.$$

Vilken blir temperaturfördelningen för stora t*? Hur tolkar du det?*

Med hjälp av Eulers formler blir

$$u(x,0) = \sin^2 x \cos^2 x = -\frac{1}{4}\, \cos x + \frac{1}{2}\, \cos(3x) - \frac{1}{4}\, \cos(5x).$$

Vi ansätter således lösningen

$$u(x,t) = a_1(t) \cos x + a_3(t) \cos(3x) + a_5(t) \cos(5x),$$

med initialdata $a_1(0) = -\frac{1}{4}$, $a_3(0) = \frac{1}{2}$, och $a_5(0) = -\frac{1}{4}$. Den givna värmeledningsekvationen leder till att

$$a_1' + 5a_1 = 0, \quad a_3' + 45a_3 = 0, \quad a_5' + 125a_5 = 0.$$

Dessa ekvationer har exponentiallösningar, och så får vi fram att

$$u(x,t) = -\frac{1}{4}\, e^{-5t}\, \cos x + \frac{1}{2}\, e^{-45t}\, \cos(3x) - \frac{1}{4} e^{-125t}\, \cos(5x)$$

är vår lösning. Att (isolerade) sidovillkor är uppfyllda följer av direktinspektion. Då $t \to +\infty$, ser vi att $u(x,t) \to 0$. Detta motvarar att medeltemperaturen i initialögonblicket $t = 0$ är 0 (“värmedöden”).

Var god vänd!

6. *Betrakta Fourierserien*

$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$

Avgör för vilka x serien konvergerar, och vad summan i så fall blir. På vilka slutna intervall konvergerar serien likformigt? Tips: skriv ut den formella serien för $S'(x)$, och försök räkna ut explicit dess delsummor.

Man kan först gissa sig till vilken funktionen $S(x)$ är, genom att skriva den som en lijärkomination av funktionerna $A(x) = 1$ och $B(x) = x$ på intervallet $]0, \pi[$, utvidgade till udda 2π-periodiska funktioner på hela reella linjen. Av detta ser man således att vi får konvergens i varje punkt x. Dock kan vi på grund av diskontinuiteter ej ha likformig konvergens överallt. Det bästa vi kan hoppas på är att ha likformig konvergens på varje intervall $[\epsilon, \pi - \epsilon]$, där ϵ är ett litet positivt tal. På grund av symmetri och periodicitet får vi dessutom en massa andra (ekvivalenta) intervall.

För att kunna visa detta, måste vi ta till tricket med de partiella summorna för $S'(x)$. Dessa motsvarar realdelen av summan

$$\sum_{n=1}^{N} e^{inx},$$

vilken kan räknas ut explicit som en ändlig geometrisk summa. Detta innebär att vi kan representera partialsummorna $S_N(x)$ till $S(x)$ som integraler av kända objekt. Ett visst trixande med dessa tillåter oss så att visa att $S_N(x) \to S(x)$ likformigt på $[\epsilon, \pi - \epsilon]$.