LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
Matematik MNF

Tentamensskrivning
Fourieranalys
Måndagen 7 januari 2002, 8.00–13.00

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar; rita gärna figur i förekommande fall.

1. Låt $f(x) = e^x$ för $-\pi < x \leq \pi$, och utvidga funktionen periodiskt till en funktion på reella axeln med period 2π.

(a) Rita grafen till funktionen $f(x)$ på intervallet $[-4\pi, 4\pi]$.

(b) Beräkna funktionens Fourierkoefficienter, och skriv upp Fourierserien för $f(x)$, både som en summa av komplexa exponentialfunktioner och som en summa av cosinus och sinus-funktioner.

(c) Beskriv grafen till Fourierseriens summa. Speciellt, vad blir summan för $x = 0$, $x = \pi$, och $x = -3\pi$?

2. Använd Fourieranalys för att visa att

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Du får själv välja funktion och lämplig identitet!

3. Bestäm Fouriertransformen av funktionerna

(a) $f(x) = x^2\, e^{-x^2}$,

(b) $g(x) = \dfrac{4}{1+9x^2}$.

4. Finn Fouriertransformen till funktionen

$$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-3|y|}}{4+(x-y)^2}\, dy.$$

5. Lös värmeledningsproblemet

$$\partial_t\, u(x,t) = 5\, \partial_x^2\, u(x,t)$$

för $t > 0$ och $0 < x < \pi$, med begynnelsevärdet

$$u(x,0) = \sin^2(x)\, \cos(3x), \qquad 0 < x < \pi,$$

och isolerade ändar, det vill säga

$$\partial_x u(0,t) = \partial_x u(\pi,t) = 0, \qquad 0 < t < +\infty.$$

Vilken blir temperaturfördelningen för stora t? Hur tolkar du det?

Var god vänd!

6. Betrakta Fourierserien
$$S(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} \sin(nx).$$
Avgör för vilka x serien konvergerar, och vad summan i så fall blir. På vilka slutna intervall konvergerar serien likformigt? Tips: skriv ut den formella serien för $S'(x)$, och försök räkna ut explicit dess delsummor.