LUNDS UNIVERSITET

Matematikcentrum
*Matematik MNF*

**Tentamensskrivning**
**Fourieranalys**
**Onsdagen 16 januari 2002, 8.00–13.00**

*Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar; rita gärna figur i förekommande fall.*

**1.** Låt $f(x) = \pi^2 - x^2$ för $-\pi < x \leq \pi$, och utvidga funktionen periodiskt till en funktion på reella axeln med period $2\pi$.

(a) Rita grafen till funktionen $f(x)$ på intervallet $[-4\pi, 4\pi]$.

(b) Beräkna funktionens Fourierkoefficienter, och skriv upp Fourierserien för $f(x)$, både som en summa av komplexa exponentialfunktioner och som en summa av cosinus och sinus-funktioner.

(c) Konvergerar Fourierserien mot funktionens värde i varje punkt $x$? Undersök om så är fallet speciellt för $x = 0$ och $x = \pi$, och se vad detta i så fall innebär för summering av de speciella serier som är inblandade.

**2.** Finn Fouriertransformen till $f$, om funktionen $f$ löser ekvationen

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{4 + (x-y)^2}\, dy = e^{-x^2}.$$

**3.** Finn en lösning till vågekvationen

$$\partial_t^2\, u(x,t) = 9\, \partial_x^2\, u(x,t)$$

för $t > 0$ och reella $x$, med begynnelsevärdet

$$u(x,0) = x\, e^{-x^2}, \qquad \partial_t u(x,0) = \cos(x).$$

Tips: d'Alemberts formel.

**4.** Utred för vilka reella $x$ serien

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\arctan(x^n)}{1 + x^{2n}}$$

konvergerar. Avgör sedan på vilka slutna intervall som serien är likformigt konvergent.

**5.** Finn en lämplig integrerbar funktion $f(x)$ på hela reella linjen sådan att

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)\, \cos(x-y)\, dy = 2\cos(x) + 3\sin(x).$$

*Var god vänd!*

**6.** Låt $x_0$ vara ett tal på intervallet $[0, 1]$, och låt $f(x)$ vara en styckvis kontinuerligt deriverbar funktion med ändligt många språng på $[0, 1]$, som utvidgas periodiskt till hela reella linjen. Antag att $f(x)$ uppfyller ekvationen

$$f(x) + f(x - x_0) = 0$$

för alla reella $x$. Visa att om $x_0$ är irrationellt måste $f(x) = 0$ gälla överallt. Blir uppgiften lättare om $f(x)$ antas kontinuerlig överallt?