LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Analytiska funktioner
3 december 1997

Skrivtid 8–13

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Bestäm alla holomorfa funktioner, som har realdelen ($z = x + iy$)

$$e^{x-2y} \cos(2x + y).$$

2. Bestäm antalet nollställen (räknade med multiplicitet) till funktionen

$$f(z) = z^7 - 9z^3 + \sin(2z)$$

i området $|z| < 2$.

3. Låt Ω vara det område vi får då vi skär bort slutna enhetsskivan från högra halvplanet: $\Omega = \{z : \Re z > 0, |z| > 1\}$. Finn en bijektiv konform avbildning från Ω till enhetsskivan $D(0, 1)$.

4. Antag att funktionen $f(z)$ är holomorf i hela planet (man säger då att $f(z)$ är *hel*). Antag dessutom att funktionen överallt uppfyller $|f(z)| \leq 1 + |z|^{3/2}$. Visa att i så fall är $f(z)$ ett polynom av grad 1, dvs $f(z) = Az + B$, för konstanter A, B. Tips: hur bevisades Liouvilles sats?

5. Beräkna integralen

$$F(a, b) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2 + b^2}\, dx,$$

där a och b är reella, $b \neq 0$.

6. Kan interpolationsproblemet

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}, \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

lösas med en funktion $f(z)$ som är holomorf i öppna enhetsskivan?