LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Analytiska funktioner
12 januari 1998

Skrivtid 14–19

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Låt D vara en enkelt sammanhängande icke-tom mängd i komplexa planet. Låt $f = u + iv$ vara en holomorf funktion i D. Visa med hjälp av Cauchy-Riemanns ekvationer att om $u + v = 0$, så är f konstant.

2. Bestäm antalet nollställen (räknade med multiplicitet) till funktionen $f(z) = z^7 + z + 1$ i första kvadranten.

3. Bestäm alla Laurentserieutvecklingar i potenser av z av funktionen

$$f(z) = \frac{z+1}{z^2 - 9}.$$

4. Finn en konform avbildning som överför kvartscirkeln

$$\{z : \Re z > 0,\ \Im z > 0,\ |z| < 1\}$$

på enhetscirkelskivan $D(0, 1)$.

5. Beräkna för $0 < a < 1$

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^a}{x^2 + 1}\, dx.$$

6. Låt f vara en en holomorf funktion i hela komplexa talplanet, och antag att det finns reella konstanter R och a, $a > 0$, sådana att $|f(z)| \geq |z|^a$ för $|z| \geq R$. Visa att f i så fall är ett polynom.