LUNDS UNIVERSITET
Matematikcentrum
Matematik MNF

Tentamensskrivning
Ordinära Differentialekvationer
Matematik MNF
Onsdagen den 22 mars 2000, 14.00–19.00

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Bestäm alla jämviktspunkter (equilibrium points) till systemet

$$\begin{cases} x' &= y\,(1-x^2-y^2) \\ y' &= x-y \end{cases}$$

Undersök varje jämviktspunkt med avseende på stabilitet respektive asymptotisk stabilitet.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

Beräkna e^{tA} och bestäm lösningen till problemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + tb$, där

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Låt $x(t)$ lösa begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{aligned} &x'(t) = 1 + t\,\big(x(t)\big)^2, \\ &x(0) = 0. \end{aligned}$$

Visa att lösningen exploderar inom ändlig tid, dvs att det finns ett tal $t_0 \in]0, +\infty[$ så att $x(t)$ finns till vänster om t_0 men $x(t) \to +\infty$ då $t \to t_0^-$.

4. Bestäm funktionen $F(t,\tau)$ så att lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x''(t) - 2\,x(t) = f(t), \qquad (0 < t < +\infty), \\ x(0) = 0, \\ x'(0) = 0, \end{cases}$$

ges på formeln

$$x(t) = \int_0^t F(t,\tau) f(\tau)\, d\tau$$

för varje kontinuerlig (reellvärd) funktion f på $[0, +\infty[$. Vad kallas funktionen $F(t,\tau)$?

5. Visa att den ordinära differential-ekvationen

$$x'' - x'\left(1 - 5\,x^4 - 7\,(x')^4\right) + x = 0$$

har en icke-trivial periodisk lösning.