LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Ordinära differentialekvationer
18 mars 1998

Skrivtid 8–13

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Bestäm alla jämviktspunkter till systemet

$$\begin{cases} x' &= x^2 - y^2 \\ y' &= y^2 - x - 2 \end{cases}$$

Undersök varje jämviktspunkt med avseende på stabilitet respektive asymptotisk stabilitet.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Beräkna e^{tA} och bestäm lösningen till problemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + tb$, där

$$b = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

och

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Antag att $x(t)$ är en kontinuerlig och positiv funktion på intervallet $[0, +\infty[$, och där uppfyller integralolikheten

$$x(t) \geq 1 + \int_0^t \sqrt{x(s)}\, ds.$$

Visa att

$$x(t) \geq \left(1 + \frac{t}{2}\right)^2.$$

4. Bestäm funktioner $g(t)$ och $F(t, \tau)$, sådana att lösningen till begynnelsevärdesproblemet

$$\begin{cases} x''(t) - 5x(t) = f(t), \qquad (0 < t < +\infty), \\ x(0) = \alpha, \\ x'(0) = \beta, \end{cases}$$

ges på formeln

$$x(t) = g(t) + \int_0^t F(t, \tau) f(\tau)\, d\tau$$

för varje kontinuerlig (reellvärd) funktion f på $[0, +\infty[$.

5. Visa att systemet

$$\begin{cases} x_1' &= -x_2 + \left(1 - 2x_1^2 - 3x_2^2\right) x_1 \\ x_2' &= x_1 + \varepsilon\left(1 - e^{x_1^2}\right) x_2 \end{cases}$$

har en sluten bana eller en jämviktspunkt i området $0 < x_1^2 + x_2^2 < 1$ om $\varepsilon > 0$.