LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Ordinära differentialekvationer
15 april 1998

Skrivtid 8–13

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Bestäm alla jämviktspunkter till systemet

$$\begin{cases} x' &= 1 + y - x^2 \\ y' &= 2x(x - y) \end{cases}$$

Undersök varje jämviktspunkt med avseende på stabilitet respektive asymptotisk stabilitet.

2. Låt

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Beräkna e^{tA} och beskriv allmänna lösningen till systemet $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

3. Antag att $x(t)$ är en kontinuerlig funktion på intervallet $[0, +\infty[$ med värden som är ≥ 0, och där uppfyller integralolikheten

$$x(t) \leq \left(\int_0^t x(s)\, ds \right)^2.$$

Visa att $x(t) = 0$ överallt.

4. Bestäm alla lösningar till differentialekvationen

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = f(t),$$

där $f(t)$ är en given kontinuerlig funktion.

5. Visa att systemet

$$\begin{cases} x' &= x + y - x^3 \\ y' &= -x + y - y^3 \end{cases}$$

har en periodisk lösning som icke är konstant.