LUNDS TEKNISKA HÖGSKOLA
MATEMATIK

TENTAMENSSKRIVNING
Ordinära differentialekvationer
fortsättningskurs

29 maj 1998Skrivtid 9–12

Inga hjälpmedel. Använd institutionens papper och skriv på bara den ena sidan. Fyll i omslaget fullständigt och skriv initialer på varje ark. Skriv tydligt. Ge klara och kortfattade motiveringar, rita gärna figur i förekommande fall.

1. Skriv Eulerekvationen

$$x'' + \frac{1}{z}\,x' - \frac{1}{9z^2}\,x = 0$$

som ett första ordningens system genom att sätta $x_1(z) = x(z)$ och $x_2(z) = x'(z)$. Ange en fundamentalmatris $F(z)$ till systemet och bestäm matrisen S_F för kretsavbildningen. Framställ om det går $F(z)$ på formen $Q(z)\,z^C$, där $Q(z)$ är analytisk i en omgivning till origo och C är en konstant matris.

2. Låt $G(x,y)$ vara en reellvärd kontinuerlig symmetrisk funktion på $[0,1]\times[0,1]$. Inför operatorn G,

$$Gf(x) = \int_0^1 G(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Visa att om normen på operatorn definieras av

$$\|G\| = \sup\big\{\|Gf\|_{L^2} : \|f\|_{L^2} \le 1\big\},$$

så gäller att

$$\|G\|^2 \le \int_0^1\int_0^1 G(x,\xi)^2\,dxd\xi.$$

3. Bestäm egenvärden och egenfunktioner till integraloperatorn G,

$$Gf(x) = \int_0^1 G(x,\xi)f(\xi)d\xi,$$

där

$$G(x,\xi) = e^{x+\xi}\cos(x-\xi).$$