

Homogena ekvationer med konstanta koefficienter

Betrakta följande andra ordningens differentialekvation:

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (1)$$

där a , b och c är konstanter och $a \neq 0$. För att kunna skriva ner den allmänna lösningen är allt vi behöver göra att finna en fundamentalmängd av lösningar, d.v.s. två linjärt oberoende lösningar. **Hur** vi finner dem är **inte viktigt**. Pröva $y(x) = e^{mx}$. Då är $y'(x) = me^{mx}$ och $y''(x) = m^2e^{mx}$, så att (1) är ekvivalent med

$$am^2 + bm + c = 0. \quad (2)$$

Fall 1: distinkta reella rötter

Om (2) har två distinkta, reella rötter, säg m_1, m_2 så har vi två lösningar $y_1(x) = e^{m_1x}$ och $y_2(x) = e^{m_2x}$. Eftersom $m_1 \neq m_2$ är y_1 inte en konstant multipel av y_2 , varav y_1 och y_2 är linjärt oberoende. Alltså kan den allmänna lösningen skrivas

$$y(x) = c_1 e^{m_1x} + c_2 e^{m_2x}.$$

Fall 2: upprepade rötter

Om (2) har en upprepad reell rot, säg m , så får vi en lösning $y_1(x) = e^{mx}$. Reduktion av ordningen ger ytterligare en lösning: $y_2(x) = xe^{mx}$. Eftersom y_1 inte kan skrivas som en konstant multipel av y_2 utgör y_1, y_2 en fundamentalmängd, så den allmänna lösningen kan skrivas

$$y(x) = c_1 e^{mx} + c_2 x e^{mx}.$$

Fall 3: komplexkonjugerade rötter

Om (2) har komplexkonjugerade rötter $\alpha \pm j\beta$, där α och β är reella, så får vi lösningar $e^{(\alpha \pm j\beta)x} = e^{\alpha x} [\cos(\beta x) \pm j \sin(\beta x)]$. Eftersom a , b och c är reella blir real- och imaginärdelarna av dessa lösningar också lösningar:

$$y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x), \quad y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Återigen är y_1 och y_2 linjärt oberoende och den allmänna lösningen kan skrivas

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos(\beta x) + c_2 e^{\alpha x} \sin(\beta x).$$

Exempel på en högre ordningens ekvation

Betrakta

$$ay''' + by'' + cy' + dy = 0,$$

där a , b , c och d är konstanter och $a \neq 0$. Antag att

$$am^3 + bm^2 + cm + d = 0$$

har tre distinkta reella rötter m_1 , m_2 och m_3 . Då är $y_1(x) = e^{m_1x}$, $y_2(x) = e^{m_2x}$ och $y_3(x) = e^{m_3x}$ lösningar. Är de linjärt oberoende?

Beräkna Wronskianen:

$$\begin{vmatrix} e^{m_1x} & e^{m_2x} & e^{m_3x} \\ m_1e^{m_1x} & m_2e^{m_2x} & m_3e^{m_3x} \\ m_1^2e^{m_1x} & m_2^2e^{m_2x} & m_3^2e^{m_3x} \end{vmatrix} \\ = (m_2 - m_1)(m_3 - m_1)(m_3 - m_2)e^{(m_1+m_2+m_3)x}.$$