Lösningar till tentamen SF1635, Signaler och system I för E, IT och ME, 071220, kl. 8.00-13.00.

1. a. Givet begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$, lös (6p)

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 3x^2,$$

Lösning. Inför $w = y'$ och dela med $1 + x^2$. Då får ekvationen formen

$$w' + \frac{2x}{1 + x^2}w = \frac{3x^2}{1 + x^2}.$$

En primitiv funktion till $2x/(1 + x^2)$ ges av $\ln(1 + x^2)$, varav en integrerande faktor ges av $1 + x^2$. Med andra ord har vi

$$\frac{d}{dx}[(1 + x^2)w] = 3x^2.$$

Detta hade man naturligtvis kunnat se direkt. Om vi integrerar denna likhet från 0 till x får vi

$$(1 + x^2)w(x) - (1 + 0^2)w(0) = x^3.$$

Eftersom $w(0) = y'(0) = 0$, får vi

$$w(x) = \frac{x^3}{1 + x^2}.$$

Eftersom $w = y'$ kan vi integrera denna likhet från 0 till x för att få

$$\begin{aligned} y(x) - y(0) &= \int_0^x \frac{t^3}{1 + t^2}dt = \int_0^x \frac{t(t^2 + 1 - 1)}{t^2 + 1}dt \\ &= \int_0^x \left[t - \frac{t}{t^2 + 1}\right] dt = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1). \end{aligned}$$

Vidare är $y(0) = 0$. **Svar:**

$$y(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ln(x^2 + 1).$$

b. Ange det maximala existensintervallet för motsvarande lösning (motivera ditt svar noga). (1p)
OBS! Det är inte nödvändigt att lösa a-delen för att kunna lösa b-delen.

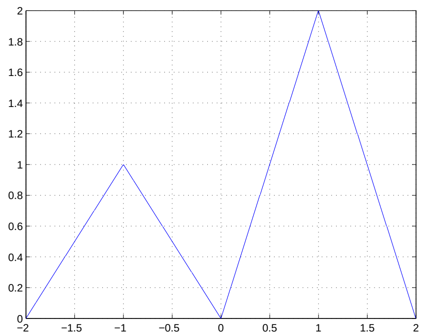
Lösning: Eftersom koefficienterna och högerledet är kontinuerliga och eftersom koefficienten framför den högsta derivatan alltid är skild ifrån noll får vi en unik lösning till begynnelsevärdesproblemet på intervallet $(-\infty, \infty)$. **Svar:** $(-\infty, \infty)$.

2. Låt

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t+1| & -2 \le t \le 0 \\ 2(1 - |t-1|) & 0 < t \le 2 \\ 0 & 2 < |t| \end{cases}$$

a. Beräkna $x'(t)$ och $x''(t)$. (2p)

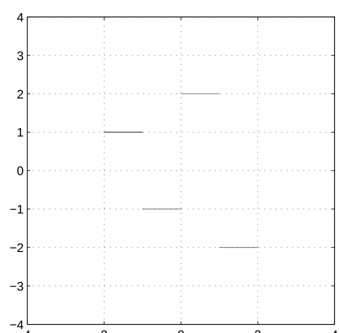
Lösning: Funktionen $x(t)$ är illustrerad nedan.



Derivering ger

$$x'(t) = \begin{cases} 1 & -2 < t < -1 \\ -1 & -1 < t < 0 \\ 2 & 0 < t < 1 \\ -2 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < |t| \end{cases}$$

Funktionen $x'(t)$ är illustrerad nedan.



Derivering en gång till ger

$$x''(t) = \delta(t+2) - 2\delta(t+1) + 3\delta(t) - 4\delta(t-1) + 2\delta(t-2).$$

Svar:

$$\begin{aligned}
x'(t) &= \begin{cases} 1 & -2 < t < -1 \\ -1 & -1 < t < 0 \\ 2 & 0 < t < 1 \\ -2 & 1 < t < 2 \\ 0 & 2 < |t| \end{cases}, \\
x''(t) &= \delta(t+2) - 2\delta(t+1) + 3\delta(t) - 4\delta(t-1) + 2\delta(t-2).
\end{aligned}$$

b. Beräkna Fouriertransformen av $x(t)$ (svaret får innehålla sinus- och cosinusuttryck, men inte exponentialuttryck). (2p)

Lösning: Om $X(\omega)$ utgör Fouriertransformen av $x(t)$ får vi

$$\begin{aligned}
-\omega^2 X(\omega) &= (j\omega)^2 X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} x''(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t}[\delta(t+2) - 2\delta(t+1) + 3\delta(t) - 4\delta(t-1) \\
&\quad +2\delta(t-2)]dt \\
&= e^{2j\omega} - 2e^{j\omega} + 3 - 4e^{-j\omega} + 2e^{-2j\omega} \\
&= \cos(2\omega) + j\sin(2\omega) - 2\cos(\omega) - 2j\sin(\omega) + 3 \\
&\quad -4\cos(\omega) + 4j\sin(\omega) + 2\cos(2\omega) - 2j\sin(2\omega) \\
&= 3 - 6\cos(\omega) + 2j\sin(\omega) + 3\cos(2\omega) - j\sin(2\omega).
\end{aligned}$$

Detta ger $X(\omega)$ för $\omega \neq 0$. För $\omega = 0$ har vi

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 = 3.$$

Svar: För $\omega \neq 0$ har vi

$$X(\omega) = \frac{-3 + 6\cos(\omega) - 3\cos(2\omega)}{\omega^2} + j\frac{\sin(2\omega) - 2\sin(\omega)}{\omega^2}$$

och för $\omega = 0$ har vi $X(0) = 3$.

c. Beräkna de reella Fourierkoefficienterna av den 4-periodiska fortsättningen av $x(t)$ (svaret får inte innehålla sinus-, cosinus- eller exponentialuttryck). (2p)

Lösning: De komplexa Fourierkoefficienterna ges av (jämför sid. 76 i kompendiet)

$$c_n = \frac{1}{4} X\left(\frac{2\pi n}{4}\right) = \frac{1}{4} X\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Följdaktligen är $c_0 = 3/4$ och, för $n \neq 0$,

$$c_n = \frac{1}{4}\left[\frac{-3+6\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)-3\cos(n\pi)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} + j\frac{\sin(n\pi)-2\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2}\right]$$

Observera att $\sin(n\pi) = 0$. För att bli av med sinus- och cosinusuttrycken är det lämpligt att betrakta fallen n udda och n jämnt separat. Om n är jämnt och $n \neq 0$ kan vi skriva $n = 2k$, där k är ett heltal och $k \neq 0$. Observera att då får vi $\sin(n\pi/2) = \sin(k\pi) = 0$, $\cos(n\pi) = \cos(2k\pi) = 1$ och $\cos(n\pi/2) = \cos(k\pi) = (-1)^k$. Med andra ord får vi, för $k \neq 0$,

$$c_{2k} = \frac{1}{4}\frac{-3+6(-1)^k-3}{(k\pi)^2} = \frac{3}{2\pi^2}\frac{(-1)^k-1}{k^2}.$$

Om n är udda kan vi skriva $n = 2k+1$ för något heltal k. Observera att vi då får $\cos(n\pi/2) = \cos[(2k+1)\pi/2] = 0$, $\cos(n\pi) = \cos[(2k+1)\pi] = \cos(\pi) = -1$, $\sin(n\pi/2) = \sin[(2k+1)\pi/2] = (-1)^k$. Detta leder till

$$c_{2k+1} = j\frac{1}{4}\frac{-2(-1)^k}{\left(\frac{(2k+1)\pi}{2}\right)^2} = j\frac{2}{\pi^2}\frac{(-1)^{k+1}}{(2k+1)^2}.$$

De reella Fourierkoefficienterna ges av $a_n = 2\mathrm{Re}c_n$ för $n \geq 0$ och $b_n = -2\mathrm{Im}c_n$ för $n \geq 1$ (jämför kompendiet, sid 3). Detta ger $a_0 = 3/2$ och, för $k \geq 1$,

$$a_{2k} = \frac{3}{\pi^2}\frac{(-1)^k-1}{k^2}.$$

För n udda har vi $a_n = 0$. Angående b_n får vi

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

för $k \geq 0$. För n jämnt blir $b_n = 0$.

Svar: De reella Fourierseriekoefficienterna ges av

$$a_0 = \frac{3}{2}, \quad a_{2k} = \frac{3}{\pi^2}\frac{(-1)^k-1}{k^2}$$

där $k \geq 1$ och av

$$b_{2k+1} = \frac{4}{\pi^2}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$$

där $k \geq 0$. Alla andra koefficienter är noll.

d. Visa att $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + ... = \pi^2/8$. (2p)

Lösning: Observera att den 4-periodiska fortsättningen av $x(t)$ uppfyller kraven för konvergenssatsen. Alltså har vi att

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi t}{2}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi t}{2}\right) \right]$$

för alla $t \in (-2, 2)$. En uppdelning av summan i jämna och udda n ger

$$\begin{aligned} (1) \qquad x(t) &= \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\pi t) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi t}{2}\right) \end{aligned}$$

Observera att $(-1)^k - 1 = 0$ för k jämnt och $(-1)^k - 1 = -2$ för k udda. Alltså har vi

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} \cos(k\pi t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3}{\pi^2} \frac{-2}{(2m+1)^2} \cos[(2m+1)\pi t].$$

Observera att om vi nu låter $t = 0$, så blir summan

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{3}{\pi^2} \frac{-2}{(2m+1)^2} = -\frac{6}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} = -\frac{6}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right).$$

Det verkar alltså lämpligt att använda sig av (1) för $t = 0$. Vi får då, eftersom $\sin(0) = 0$,

$$0 = x(0) = \frac{3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{\pi^2} \frac{(-1)^k - 1}{k^2} = \frac{3}{4} - \frac{6}{\pi^2} \left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots\right)$$

Med andra ord,

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{8},$$

vilket är vad som skulle visas.

3. Finn den allmänna lösningen till ekvationen (8p)

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Lösning. Låt

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

A:s egenvärden ges av ekvationen

$$0 = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -3 - 3\lambda + \lambda + \lambda^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Vi har alltså ett upprepat egenvärde $\lambda = 1$. Motsvarande egenvektor(er) ges av

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

vilket ger en egenvektor

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Vi får alltså en lösning

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t.$$

Vi söker en annan lösning på formen

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{K}te^t + \mathbf{P}e^t.$$

Kravet på $\mathbf{P}$ blir då att

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

vilket ger en lösning

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix}.$$

Den allmänna lösningen till motsvarande homogena system blir alltså

$$\mathbf{X}_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^t \right].$$

Vi kan bilda en fundamentalmatris

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ e^t & (t+1/2)e^t \end{pmatrix}.$$

Inversen blir

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} -(2t+1)e^{-t} & 2(t+1)e^{-t} \\ 2e^{-t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}.$$

Om vi låter

$$\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}$$

så får vi

$$\Phi^{-1}(t)\mathbf{F}(t) = \begin{pmatrix} -2t-1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

En primitiv funktion till detta är

$$\begin{pmatrix} -t^2 - t \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Alltså får vi en partikulärlösning

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} e^t & (t+1)e^t \\ e^t & (t+1/2)e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -t^2 - t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (t^2+t)e^t \\ t^2e^t \end{pmatrix}$$

Svar: Den allmänna lösningen ges av

$$\mathbf{X} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} te^t + \begin{pmatrix} 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} e^t \right] + \begin{pmatrix} (t^2+t)e^t \\ t^2e^t \end{pmatrix}.$$

4. Antag att $I(k)$ är en generaliserad funktion definierad för $k \geq 0$ (utan δ-pulser vid $k = 0$) och att

$$\hat{I}(x) = \int_0^\infty I(k)\cos(kx)dk.$$

Som motivering kan nämnas att $\hat{I}(x)$ är irradiansen (mätt i W/m^2) som mäts i en Fouriertransformspektrometer som funktion av ena spegelns position. $I(k)$ är irradiansen hos den inkommande strålningen som funktion av vågtalet $k = 2\pi/\lambda$, där λ är våglängden.

a. Visa att om vi utvidgar I till hela reella talaxeln så att I blir en jämn funktion, så är (2p)

$$\hat{I}(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-jkx}I(k)dk.$$

Lösning: Enligt definition har vi

$$\begin{aligned} (2) \qquad \hat{I}(x) &= \int_0^\infty I(k)\cos(kx)dk = \int_0^\infty \frac{1}{2}(e^{jkx} + e^{-jkx})I(k)dk \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-jkx}I(k)dk + \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{jkx}I(k)dk. \end{aligned}$$

Den första termen är redan på den önskade formen. I den andra termen är det lämpligt att genomföra ett variabelbyte $\kappa = -k$. Vi får då

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{jkx}I(k)dk = \frac{1}{2}\int_0^{-\infty} e^{-j\kappa x}I(-\kappa)(-d\kappa) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{-j\kappa x}I(\kappa)d\kappa,$$

givet att I har utvidgats så att I blir en jämn funktion, d.v.s. $I(-k) = I(k)$. Om vi nu döper om κ till k, får vi

$$\frac{1}{2}\int_0^\infty e^{jkx}I(k)dk = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 e^{-jkx}I(k)dk.$$

Om vi nu kombinerar denna observation med (2), får vi

$$\hat{I}(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^\infty e^{-jkx}I(k)dk,$$

vilket skulle visas.

b. Antag att $\hat{I}(x) = \cos(2x) + \cos(4x)$. Vad är då $I(k)$ för $k \geq 0$? (4p) OBS! Du får använda resultatet i a-delen utan att ha bevisat det!

Lösning: Enligt a-delen är $\hat{I}$ Fouriertransformen av $I/2$ (utvidgad till en jämn funktion). Alltså är $I/2$ Fourierinverstransformen av $\hat{I}$. Enligt tabell, t. ex. sid 69 i kompendiet, får vi att inverstransformen av $\cos(ax)$ ges av $[\delta(k-a) + \delta(k+a)]/2$. Med andra ord har vi

$$\frac{1}{2}I(k) = \frac{1}{2}[\delta(k-2) + \delta(k+2)] + \frac{1}{2}[\delta(k-4) + \delta(k+4)].$$

Alltså blir $I(k)$ (strikt taget den utvidgade funktionen)

$$I(k) = \delta(k-2) + \delta(k+2) + \delta(k-4) + \delta(k+4).$$

För $k \geq 0$ får vi då
Svar:

$$I(k) = \delta(k-2) + \delta(k-4).$$

c. Om $I(k) \neq 0$ för $k > 0$ säger man att den inkommande strålningen innehåller strålning svarande mot våglängden $\lambda = 2\pi/k$. Vilka våglängder finns representerade i det exempel som gavs i b-delen? (2p)

Lösning: För $k > 0$ är $I(k)$ enbart skild ifrån noll då $k = 2$ eller $k = 4$. Motsvarande våglängder ges av $2\pi/2 = \pi$ och $2\pi/4 = \pi/2$.
Svar: π, $\pi/2$.

5. Lös ekvationen

$$\frac{di}{dt} + 2i(t) + 2\int_0^t i(\tau)d\tau = f(t)$$

givet att $i(0) = 0$ och att f är en 2-periodisk funktion sådan att $f(t) = 1$ för $0 \leq t < 1$ och $f(t) = -1$ för $1 \leq t < 2$. Som motivering kan nämnas att ovanstående ekvation är ekvationen för strömmen i en elektrisk krets bestående av en resistans, en kapacitans och en induktans kopplade i serie med en yttre pålagd spänning given av en fyrkantvåg.
a. Beräkna Laplacetransformen av $i(t)$. (3p)

Lösning: Låt $I(s)$ beteckna Laplacetransformen av $i(t)$ och $F(s)$ Laplacetransformen av $f(t)$. Eftersom $i(0) = 0$ ger ekvationen

$$sI(s) + 2I(s) + \frac{2}{s}I(s) = F(s).$$

Eftersom f är en 2-periodisk funktion så ges $F(s)$ av (jämför med ZC, sid 310)

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2s}}\int_0^2 e^{-st}f(t)dt.$$

Men

$$\begin{aligned}
\int_0^2 e^{-st} f(t)dt &= \int_0^1 e^{-st}dt - \int_1^2 e^{-st}dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{s}e^{-st}\right]_1^2 \\
&= -\frac{1}{s}(e^{-s}-1) + \frac{1}{s}(e^{-2s}-e^{-s}) \\
&= \frac{1}{s}(1-e^{-s})(1-e^{-s}).
\end{aligned}$$

Eftersom $1 - e^{-2s} = (1-e^{-s})(1+e^{-s})$ får vi

$$F(s) = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.$$

Ekvationen ger alltså

$$\frac{1}{s}[s^2 I(s) + 2sI(s) + 2] = \frac{1}{s}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.$$

Svar:

$$I(s) = \frac{1}{s^2+2s+2}\frac{1-e^{-s}}{1+e^{-s}}.$$

b. Beräkna $i(t)$. (6p)

Lösning: Observera att (geometrisk serie)

$$\frac{1}{1+e^{-s}} = 1 - e^{-s} + e^{-2s} - e^{-3s} + ...,$$

jämför med exempel 8, sidan 311 i ZC. Vidare är $s^2+2s+2 = (s+1)^2+1$. Alltså har vi

$$I(s) = \frac{1}{(s+1)^2+1}(1-e^{-s})(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+...).$$

Men

$$\begin{aligned}
&(1-e^{-s})(1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+...) \\
&= 1-e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+... \\
&\quad -e^{-s}+e^{-2s}-e^{-3s}+... \\
&= 1-2e^{-s}+2e^{-2s}-2e^{-3s}+...
\end{aligned}$$

varav

$$\begin{aligned}
I(s) &= \frac{1}{(s+1)^2+1} - 2\frac{1}{(s+1)^2+1}e^{-s} + 2\frac{1}{(s+1)^2+1}e^{-2s} \\
&\quad -2\frac{1}{(s+1)^2+1}e^{-3s} + ...
\end{aligned}$$

Enligt tabell är inverstransformen av $1/[(s+1)^2+1]$ given av $e^{-t}\sin(t)$. Alltså blir

Svar:

$$\begin{aligned} i(t) &= e^{-t}\sin(t) - 2e^{-(t-1)}\sin(t-1)\mathcal{U}(t-1) \\ &\quad +2e^{-(t-2)}\sin(t-2)\mathcal{U}(t-2) - 2e^{-(t-3)}\sin(t-3)\mathcal{U}(t-3) + ... \\ &= e^{-t}\sin(t) + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k e^{-(t-k)}\sin(t-k)\mathcal{U}(t-k). \end{aligned}$$

6. Låt $s(t)$ och $s_N(t)$ ges av

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/L}, \quad s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{j2\pi nt/L}.$$

Om man tolkar $s(t)$ som en signal kan man tolka $s_N(t)$ som resultatet av att man har låtit signalen passera genom ett lågpassfilter, karakteriserat av ett heltal N.

a. Antag nu att N och L är givna och låt $T = L/M$, där M är ett heltal. Hur stort måste M vara för att vi exakt skall kunna bestämma $s_N(t)$ ur sampelvärdena $s_N(0)$, $s_N(T)$,...,$s_N[(M-1)T]$? (8p)

Lösning: Observera att $s_N(t)$ är en bandbegränsad signal; inga frekvenser strikt större än N/L förekommer. Enligt samplingsteoremet räcker det alltså att sampla signalen med en samplingsfrekvens $f_s > 2N/L$, jämför kompendiet, sid 80. I vårt fall är $f_s = 1/T = M/L$. Kravet för att sampelvärdena exakt skall bestämma funktionen kan alltså formuleras som $M/L > 2N/L$, d.v.s. $M > 2N$ eller $M \geq 2N + 1$. Å andra sidan bestäms alla sampelvärdena av $s_N(0)$, $s_N(T)$,..., $s_N[(M-1)T]$ eftersom s_N är L-periodisk.

Svar: $M \geq 2N + 1$.

b. Antag att $c_n = 1/2^{|n|}$. Hur stort måste N väljas för att (2p)

$$\frac{1}{L}\int_0^L |s_N(t) - s(t)|^2 dt < \frac{1}{2^{10}}.$$

Lösning: Observera att

$$s(t) - s_N(t) = \sum_{n=-\infty}^{-N-1} c_n e^{jnt} + \sum_{n=N+1}^{\infty} c_n e^{jnt}.$$

Enligt Parsevals relation (jämför sid 10 i kompendiet) får vi då

$$\frac{1}{L}\int_0^L |s(t) - s_N(t)|^2 dt = \sum_{n=-\infty}^{-N-1} |c_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2.$$

Eftersom $c_n = 1/2^{|n|}$ får vi

$$\begin{aligned}
\sum_{n=-\infty}^{-N-1} |c_n|^2 + \sum_{n=N+1}^{\infty} |c_n|^2 &= \sum_{n=-\infty}^{-N-1} 4^{-|n|} + \sum_{n=N+1}^{\infty} 4^{-|n|} = 2 \sum_{n=N+1}^{\infty} 4^{-n} \\
&= 2 \cdot 4^{-N-1} \sum_{n=0}^{\infty} 4^{-n} = 2 \cdot 4^{-N-1} \frac{1}{1-1/4} \\
&= \frac{2}{3} \cdot 4^{-N} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.
\end{aligned}$$

Vi ser att $N = 5$ ger att integralen blir mindre än $1/2^{10}$, men att $N = 4$ inte är tillräckligt.
Svar: $N \geq 5$.