Tentamen SF1635, Signaler och system I för E, IT och ME, 080128, kl. 8.00-13.00

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential equations with Boundary-Value Problems, utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar samt räknedosa.
Betyg: För betyget E krävs (inklusive bonus) minst 24p, för D minst 28p, för C minst 32p, för B minst 36p och för betyget A minst 40p. 20-23p ger betyget F_x, som berättigar till en kompletterande tentamen.
OBS! För full poäng krävs en fullständig motivering.

1. Givet begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$, lös (6p)

$$y'' = 1 + (y')^2.$$

2. Finn den funktion x vars Fouriertransform X uppfyller följande ekvation: (8p)

$$-\frac{d^2X}{d\omega^2}(\omega) + X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}.$$

3. Finn den allmänna lösningen till ekvationen (8p)

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

4. Låt

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(nt), \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin(nt).$$

Enligt β gäller då att

$$x(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi t}{2} + \frac{t^2}{4}$$

för $0 < t < 2\pi$.

a. Beräkna, med hjälp av ovanstående information och utan att använda tabell, (4p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

b. Beräkna, med hjälp av ovanstående information och utan att använda tabell, (3p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Motivera ditt svar noga!

c. Beräkna (3p)

$$\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt.$$

5. Finn den allmänna lösningen till (8p)

$$(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$$

givet att $y_1(x) = 1/(x^2+1)$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

6. Betrakta ett system som är så beskaffat att om man skickar in en insignal x_{in}, $t \geq 0$, så blir utsignalen

$$x_{ut}(t) = \int_0^t h_a(\tau)x_{in}(t-\tau)d\tau,$$

där *överföringsfunktionen* h_a är sådan att dess Laplacetransform, $H_a(s)$, ges av

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + 2as + 1}.$$

Parametern a kan man variera och för varje värde får man ett nytt system. Vid praktisk användning av systemet så kommer man ibland att ha insignaler på formen $\sin(\omega_0 t)$ eller $\cos(\omega_0 t)$. Man vill därför vara säker på att utsignalen inte blir godtyckligt stor då systemet matas med sådana insignaler. Problemet är alltså: för vilka värden på a blir $x_{ut}(t)$, $t \geq 0$, given ovan, begränsad för alla signaler x_{in} på formen $\cos(\omega_0 t)$ och $\sin(\omega_0 t)$ där ω_0 är en godtycklig konstant? (10p)