Tentamen SF1635, Signaler och system I för E, IT och ME, 080128, kl. 8.00-13.00

1. Givet begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$, lös (6p)

$$y'' = 1 + (y')^2.$$

Lösning: Låt $w = y'$. Då uppfyller w ekvationen

$$w' = 1 + w^2,$$

$w(0) = 0$. Denna ekvation är en separabel första ordningens ekvation och vi har

$$\int \frac{1}{1+w^2} dw = \int dt.$$

Följdaktligen får vi

$$\arctan[w(t)] = t + c.$$

Eftersom $w(0) = 0$, måste vi ha $c = 0$, varav $\arctan[w(t)] = t$, så att

$$w(t) = \tan(t).$$

Eftersom $y' = w$, leder detta till

$$\begin{aligned} y(t) &= y(0) + \int_0^t w(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\sin(\tau)}{\cos(\tau)} d\tau \\ &= -\ln[\cos(t)] + \ln[\cos(0)] = -\ln[\cos(t)]. \end{aligned}$$

Svar: $y(t) = -\ln[\cos(t)]$ (man bör naturligtvis kontrollera att detta stämmer).

2. Finn den funktion x vars Fouriertransform X uppfyller följande ekvation: (8p)

$$-\frac{d^2X}{d\omega^2}(\omega) + X(\omega) = \frac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4}.$$

Lösning: Enligt tabell är $-d^2X/d\omega^2$ Fouriertransformen av $t^2x(t)$. Alltså är vänsterledet Fouriertransformen av $t^2x(t) + x(t) = (1 + t^2)x(t)$. För att kunna beräkna inverstransformen av högerledet är det lämpligt att först notera att $\omega^4 + 5\omega^2 + 4 = (\omega^2 + 1)(\omega^2 + 4)$. Partialbråksuppdelning ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega^4 + 5\omega^2 + 4} &= \frac{1}{(\omega^2+1)(\omega^2+4)} = \frac{1}{3}\frac{1}{\omega^2+1} - \frac{1}{3}\frac{1}{\omega^2+4} \\ &= \frac{1}{6}\frac{2}{\omega^2+1} - \frac{1}{12}\frac{4}{\omega^2+4}. \end{aligned}$$

Enligt tabell får vi nu att inverstransformen av högerledet är

$$\frac{1}{6}e^{-|t|} - \frac{1}{12}e^{-2|t|}.$$

Ekvationen ger alltså att

$$(t^2+1)x(t) = \frac{1}{12}(2e^{-|t|} - e^{-2|t|}).$$

Svar:

$$x(t) = \frac{1}{12(t^2+1)}(2e^{-|t|} - e^{-2|t|}).$$

3. Finn den allmänna lösningen till ekvationen (8p)

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Lösning: Beräkna först den allmänna lösningen till motsvarande homogena ekvation. Vi har

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Den relevanta matrisens egenvärden ges alltså av $\lambda = \pm j$. En egenvektor $\mathbf{K}$ svarande mot egenvärdet j måste uppfylla

$$\begin{pmatrix} -j & 1 \\ -1 & -j \end{pmatrix} \mathbf{K} = 0.$$

Vi ser att

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix}$$

är en lösning till denna ekvation. En lösning till den homogena ekvationen ges alltså av

$$\begin{pmatrix} 1 \\ j \end{pmatrix} e^{jt} = \begin{pmatrix} \cos(t) + j\sin(t) \\ -\sin(t) + j\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Detta ger två linjärt oberoende lösningar $\mathbf{X}_1$ och $\mathbf{X}_2$ till motsvarande homogena system, givna av

$$\mathbf{X}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_2(t) = \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix}$$

En fundamentallösning ges följdaktligen av

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}.$$

Beräkna

$$\Phi^{-1}(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}$$

och

$$\int \begin{pmatrix} \cos(t) & -\sin(t) \\ \sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} dt = \int \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} dt = \begin{pmatrix} C_1 \\ t + C_2 \end{pmatrix}.$$

En partikulärlösning ges alltså av

$$\mathbf{X}_p = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

Svar:

$$\mathbf{X}(t) = c_1 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ -\sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} t\sin(t) \\ t\cos(t) \end{pmatrix}.$$

4. Låt

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cos(nt), \quad y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\sin(nt).$$

Enligt β gäller då att

$$x(t) = \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi t}{2} + \frac{t^2}{4}$$

för $0 < t < 2\pi$.

a. Beräkna, med hjälp av ovanstående information och utan att använda tabell, (4p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Lösning: Det går att beräkna

$$\int_0^{2\pi} x^2(t)dt$$

på två sätt. Å ena sidan kan man använda definitionen ovan och det faktum att $\{\cos(t), \cos(2t), \cos(3t), ...\}$ är en ortogonal mängd funktioner på intervallet $[0, 2\pi]$ för att se att

$$\int_0^{2\pi} x^2(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt.$$

Eftersom

$$\int_0^{2\pi} \cos^2(nt)dt = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}[1 + \cos(2nt)]dt = \pi,$$

så får vi

$$\int_0^{2\pi} x^2(t)dt = \pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}.$$

Å andra sidan kan man använda ovanstående information från β och beräkna

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} x^2(t)dt &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi t}{2} + \frac{t^2}{4}\right)^2 dt \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\pi^4}{36} + \frac{\pi^2 t^2}{4} + \frac{t^4}{16} - \frac{\pi^3 t}{6} + \frac{\pi^2 t^2}{12} - \frac{\pi t^3}{4}\right) dt \\
&= \frac{\pi^4}{36} \cdot 2\pi + \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{(2\pi)^3}{3} + \frac{1}{16} \cdot \frac{(2\pi)^5}{5} - \frac{\pi^3}{6} \cdot \frac{(2\pi)^2}{2} \\
&\quad + \frac{\pi^2}{12} \cdot \frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{\pi}{4} \cdot \frac{(2\pi)^4}{4} \\
&= \frac{\pi^5}{18} + \frac{2\pi^5}{3} + \frac{2\pi^5}{5} - \frac{\pi^5}{3} + \frac{2\pi^5}{9} - \pi^5 \\
&= \frac{11\pi^5}{18} + \frac{2\pi^5}{5} - \pi^5 = \frac{(55 + 36 - 90)\pi^5}{90} = \frac{\pi^5}{90}.
\end{aligned}$$

Följdaktligen gäller att

$$\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^5}{90}.$$

Svar: $\pi^4/90$.

b. Beräkna, med hjälp av ovanstående information och utan att använda tabell, (3p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Motivera ditt svar noga!

Lösning: Enligt definitionen av $x(t)$ gäller att

$$x(0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cos(n \cdot 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Emellertid vet vi enbart vad $x(t)$ är för $0 < t < 2\pi$. Vi kan alltså inte direkt använda oss av den givna formeln. Å andra sidan vet vi att Fourierserien konvergerar till medelvärdet av höger- och vänstergränsvärdena i 0. Högergränsvärdet beräknas till $\pi^2/6$. Eftersom $x(t)$ är 2π-periodisk sammanfaller vänstergränsvärdet i 0 med vänstergränsvärdet i 2π, vilket beräknas till $\pi^2/6$.

Svar: $\pi^2/6$.

c. Beräkna (3p)

$$\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt.$$

Lösning: Beräkna

$$\int_0^{2\pi} x(t)y(t)dt = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)y(t)dt = 0,$$

där skälet till den första likheten är att x och y är 2π-periodiska och skälet till den andra likheten är att x är jämn och y är udda.

Svar: 0.

5. Finn den allmänna lösningen till (8p)

$$(1+x^2)y''(x) + 4xy'(x) + 2y(x) = 1$$

givet att $y_1(x) = 1/(x^2+1)$ är en lösning till motsvarande homogena ekvation.

Lösning: Observera att ekvationen kan skrivas

$$\frac{d^2}{dx^2}[(1+x^2)y] = 1.$$

Genom att integrera två gånger ser man att

$$(1+x^2)y(x) = \frac{1}{2}(x^2+1) + c_1x + c_2.$$

Följdaktligen ges den allmänna lösningen av

$$y(x) = c_1\frac{x}{x^2+1} + c_2\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}.$$

Alternativt kan man använda den givna lösningen till den homogena ekvationen samt reduktion av ordningen för att finna en annan lösning till den homogena ekvationen. Ansätt $y_2 = uy_1$. Om man stoppar in denna ansats i den homogena ekvationen får man $u'' = 0$, varav $u(x) = c_1x + c_2$. Vi får alltså en ny lösning till den homogena ekvationen:

$$y_2(x) = \frac{x}{1+x^2}.$$

Observera att y_1 och y_2 är linjär oberoende. För att finna en partikulärlösning kan man nu använda variation av parametermetoden, men det är också lätt att se att en partikulärlösning ges av $y_p(x) = 1/2$.

Svar:

$$y(x) = c_1\frac{x}{1+x^2} + c_1\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{2}.$$

6. Betrakta ett system som är så beskaffat att om man skickar in en insignal x_{in}, $t \geq 0$, så blir utsignalen

$$x_{ut}(t) = \int_0^t h_a(\tau) x_{in}(t-\tau)\, d\tau,$$

där *överföringsfunktionen* h_a är sådan att dess Laplacetransform, $H_a(s)$, ges av

$$H_a(s) = \frac{1}{s^2 + 2as + 1}.$$

Parametern a kan man variera och för varje värde får man ett nytt system. Vid praktisk användning av systemet så kommer man ibland att ha insignaler på formen $\sin(\omega_0 t)$ eller $\cos(\omega_0 t)$. Man vill därför vara säker på att utsignalen inte blir godtyckligt stor då systemet matas med sådana insignaler. Problemet är alltså: för vilka värden på a blir $x_{ut}(t)$, $t \geq 0$, given ovan, begränsad för alla signaler x_{in} på formen $\cos(\omega_0 t)$ och $\sin(\omega_0 t)$ där ω_0 är en godtycklig konstant? (10p)

Lösning: Låt X_{in} och X_{ut} beteckna Laplacetransformerna av insignalen respektive utsignalen. Vi har då

$$X_{ut}(s) = \frac{1}{s^2 + 2as + 1} X_{in}(s).$$

De X_{in} vi är intresserade av ges av

$$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}.$$

Observera att i det första fallet kan ω_0 vara 0, och vi har då $X_{in}(s) = 1/s$. Notera att

$$s^2 + 2as + 1 = (s+a)^2 + 1 - a^2.$$

Vi får nu ett antal olika fall, beroende på a:s värde. Vi ser att $a^2 = 1$ ger upprepade reella rötter. Låt oss därför betrakta fallen $-\infty < a < -1$, $a = -1$, $-1 < a < 1$, $a = 1$ och $1 < a < \infty$ separat.

1. $-\infty < a < -1$. I detta fall har ekvationen $s^2 + 2as + 1 = 0$ två olika positiva reella rötter, säg $\lambda_{1,a}$ och $\lambda_{2,a}$. Med insignalen $X_{in}(s) = 1/s$ får vi en utsignal vars Laplacetransform ges av

$$\begin{aligned}\frac{1}{s(s-\lambda_{1,a})(s-\lambda_{2,a})} &= \frac{1}{\lambda_{1,a}\lambda_{2,a}}\frac{1}{s} + \frac{1}{\lambda_{2,a}(\lambda_{2,a}-\lambda_{1,a})}\frac{1}{s-\lambda_{2,a}} \\ &\quad + \frac{1}{\lambda_{1,a}(\lambda_{1,a}-\lambda_{2,a})}\frac{1}{s-\lambda_{1,a}}.\end{aligned}$$

Om man inverstransformerar dessa uttryck får man termer som växer exponentiellt. Alltså kan vi utesluta $a < -1$.

2. $a = -1$. Med insignalen $X_{in}(s) = 1/s$ får vi en utsignal vars Laplacetransform ges av

$$\frac{1}{s(s-1)^2} = \frac{A}{s} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{s-1},$$

där vi vet att alla konstanter A, B och C måste vara skilda från 0. Detta ger också exponentiellt växande termer. Alltså kan vi utesluta $a = -1$.

3. $-1 < a < 1$. I detta fall har vi två komplexkonjugerade rötter. Om $a < 0$ har de positiv realdel och med hjälp av argument snarlika de givna ovan ser man att det finns exponentiellt växande termer i detta fall. Om $a = 0$ ges Laplacetransformen av utsignalen av

$$X_{ut}(s) = \frac{1}{s^2+1} X_{in}(s).$$

Om vi låter insignalen vara $x_{in}(t) = \sin(t)$ får vi alltså

$$X_{ut}(s) = \frac{1}{(s^2+1)^2}.$$

Alltså har vi

$$x_{ut}(t) = \frac{1}{2}[\sin(t) - t\cos(t)],$$

varav x_{ut} ej är begränsad för $t \geq 0$. Vi kan alltså utesluta $a = 0$. Om $0 < a < 1$ har vi komplexkonjugerade rötter till $s^2 + 2as + 1 = 0$ med negativ realdel. Oavsett om insignalen är $\cos(\omega_0 t)$ eller $\sin(\omega_0 t)$ får man då en begränsad utsignal, vilket man kan se med hjälp av partialbråksuppdelning.

4. $a = 1$. I detta fall kan man, med hjälp av partialbråksuppdelning i de olika fallen se att x_{ut} är begränsad för $t \geq 0$.

5. Om $a > 1$ kan man, med hjälp av partialbråksuppdelning, se att x_{ut} är begränsad för $t \geq 0$.

Svar: $a > 0$.