TENTAMEN SF1635, SIGNALER OCH SYSTEM I FÖR E, IT OCH ME, 071220, KL. 8.00-13.00.

Hjälpmedel: Zill-Cullen; Differential equations with Boundary-Value Problems, utdelat arbetsmaterial, β Mathematics Handbook, kursens formelsamlingar samt räknedosa.
Betyg: För betyget E krävs (inklusive bonus) minst 24p, för D minst 28p, för C minst 32p, för B minst 36p och för betyget A minst 40p. 20-23p ger betyget F_x, som berättigar till en kompletterande tentamen. *OBS! För full poäng krävs en fullständing motivering.*

1. a. Givet begynnelsevillkoren $y(0) = y'(0) = 0$, lös (6p)

$$(1 + x^2)y'' + 2xy' = 3x^2.$$

b. Ange det maximala existensintervallet för motsvarande lösning (motivera ditt svar noga). (1p)
OBS! Det är inte nödvändigt att lösa a-delen för att kunna lösa b-delen.

2. Låt

$$x(t) = \begin{cases} 1 - |t+1| & -2 \le t \le 0 \\ 2(1 - |t-1|) & 0 < t \le 2 \\ 0 & 2 < |t|. \end{cases}$$

a. Beräkna $x'(t)$ och $x''(t)$. (2p)
b. Beräkna Fouriertransformen av $x(t)$ (svaret får innehålla sinus- och cosinusuttryck, men inte exponentialuttryck). (2p)
c. Beräkna de reella Fourierkoefficienterna av den 4-periodiska fortsättningen av $x(t)$ (svaret får inte innehålla sinus-, cosinus- eller exponentialuttryck). (2p)
d. Visa att $1 + 1/3^2 + 1/5^2 + ... = \pi^2/8$. (2p)

3. Finn den allmänna lösningen till ekvationen (8p)

$$\mathbf{X}' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{X} + \begin{pmatrix} e^t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4. Antag att $I(k)$ är en generaliserad funktion definierad för $k \ge 0$ (utan δ-pulser vid $k = 0$) och att

$$\hat{I}(x) = \int_0^\infty I(k)\cos(kx)dk.$$

Som motivering kan nämnas att $\hat{I}(x)$ är irradiansen (mätt i W/m^2) som mäts i en Fouriertransformspektrometer som funktion av ena spegelns position. $I(k)$ är irradiansen hos den inkommande strålningen som

funktion av vågtalet $k = 2\pi/\lambda$, där λ är våglängden.
a. Visa att om vi utvidgar I till hela reella talaxeln så att I blir en jämn funktion, så är (3p)

$$\hat{I}(x) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-jkx} I(k)\,dk.$$

b. Antag att $\hat{I}(x) = \cos(2x) + \cos(4x)$. Vad är då $I(k)$ för $k \geq 0$? (4p)
OBS! Du får använda resultatet i a-delen utan att ha bevisat det!
c. Om $I(k) \neq 0$ för $k > 0$ säger man att den inkommande strålningen innehåller strålning svarande mot våglängden $\lambda = 2\pi/k$. Vilka våglängder finns representerade i det exempel som gavs i b-delen? (1p)

5. Lös ekvationen

$$\frac{di}{dt} + 2i(t) + 2\int_0^t i(\tau)\,d\tau = f(t)$$

givet att $i(0) = 0$ och att f är en 2-periodisk funktion sådan att $f(t) = 1$ för $0 \leq t < 1$ och $f(t) = -1$ för $1 \leq t < 2$. Som motivering kan nämnas att ovanstående ekvation är ekvationen för strömmen i en elektrisk krets bestående av en resistans, en kapacitans och en induktans kopplade i serie med en yttre pålagd spänning given av en fyrkantvåg.
a. Beräkna Laplacetransformen av $i(t)$. (3p)
b. Beräkna $i(t)$. (6p)

6. Låt $s(t)$ och $s_N(t)$ ges av

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j2\pi nt/L}, \quad s_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{j2\pi nt/L}.$$

Om man tolkar $s(t)$ som en signal kan man tolka $s_N(t)$ som resultatet av att man har låtit signalen passera genom ett lågpassfilter, karakteriserat av ett heltal N.
a. Antag nu att N och L är givna och låt $T = L/M$, där M är ett heltal. Hur stort måste M vara för att vi exakt skall kunna bestämma $s_N(t)$ ur sampelvärdena $s_N(0)$, $s_N(T)$,...,$s_N[(M-1)T]$? (7p)
b. Antag att $c_n = 1/2^{|n|}$. Hur stort måste N väljas för att (3p)

$$\frac{1}{L}\int_0^L |s_N(t) - s(t)|^2\,dt < \frac{1}{2^{10}}.$$