Lösningar till tentamen i kurserna SF1616 och 5B1130
Matematiska metoder I, för S 080821

Del 1

1. $A^T A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$. Raderna är proportionella. Det ger att determinanten är noll vilket innebär att matrisen saknar invers.

2. Kvadratkomplettering ger $(z-(2-i))^2-(2-i)^2+7-4i=0$ ur vilket vi får $(z-(2-i))^2=-4$. Vi inför $w=z-(2-i)=x+iy$ och får systemet
$$\begin{cases} x^2-y^2=-4 \\ 2xy=0 \\ x^2+y^2=|w|^2=4 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=\pm 2 \Rightarrow \begin{cases} w_1=2i \\ w_2=-2i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1=2i+2-i=2+i \\ z_2=-2i+2-i=2-3i \end{cases}$$

3. Definitionsområdet ges av att $\sqrt{x^2+1}+x>0$ vilket gäller för alla x. Vi visar nu att funktionen är växande för alla x vilket ger att den är injektiv och därmed inverterbar för alla x:
$$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}}\cdot 2x+1\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\cdot\left(\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0$$
för alla x och alltså växande. Det sökta intervallet är alltså $(-\infty,+\infty)$.

4. Vi använder l´Hospitals regel ($\frac{0}{0}$ i alla steg): $\lim_{x\to 0}\frac{x-\ln(x+1)}{e^x-x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{x+1}}{e^x-1}=$
$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{e^x}=1.$$

5. Vi utför substitutionen $\begin{matrix} u=\sqrt{x}+1 \Rightarrow x=(u-1)^2 \Rightarrow dx=2(u-1)du \\ x=0\to u=1,\ x=1\to u=2 \end{matrix}$ vilket ger integralen $2\int_1^2\frac{(u-1)}{u^2}du=2\int_1^2\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{u^2}\right)=2\left[\ln|u|+\frac{1}{u}\right]_1^2=2\ln 2-1$. Om man i stället utför substitutionen $u=\sqrt{x}$ måste man sedan partialbråksuppdela.

6. Vi använder "Limit Comparison Test" och jämför med den divergenta $p-$serien ($p=1$) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$: $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^2+2}{n^3+3n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3+2n}{n^3+3n}=1$. Enligt testet är då den givna serien divergent.

7. Vi undersöker vilka värden funktionen kan anta. Vi ser att definititionsområdet ges av $x\geq 0$. $f'(x)=2x\sqrt{3x}+(x^2-5)\cdot\frac{3}{2\sqrt{3x}}=...=\frac{15(x^2-1)}{2\sqrt{3x}}=0\Rightarrow x=\pm 1$.

   Funktionen har alltså en ändpunkt (även singulär) $x=0$ och en kritisk punkt $x=1$.

   $f(0)=0$, $f(1)=-4\sqrt{3}$. För $0<x<1$ är derivatan negativ och för $x>1$ är derivatan positiv. Det ger att funktionen har minimum för $x=1$. Eftersom $-4\sqrt{3}>-4\sqrt{4}=-8$ finns det inget x sådant att $f(x)=-8$.

Del 2

8. Det homogena problemets karakteristiska ekv är $r^2-6r+10=0\Rightarrow r=3\pm i$.
   Det ger den allmänna lösningen till den homogena ekvationen:
   $y_h(x)=e^{3x}(A\cos x+B\sin x)$.
   Vi ansätter som partikulärlösning $y_p(x)=a\sin x+b\cos x+c$ vilket ger
   $y_p{}'(x)=a\cos x-b\sin x\Rightarrow y_p{}''(x)=-a\sin x-b\cos x$.
   Insättning i diffekvationen ger
   $(-a+6b+10a)\sin x+(-b-6a+10b)\cos x+10c=39\cos x+10$.
   Detta ger systemet
   $\begin{cases}6b+9a=0\\9b-6a=39\\10c\quad\;=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=3\\c=1\end{cases}\Rightarrow y_p(x)=3\cos x-2\sin x+1$. Den allmänna lösningen
   är då $y(x)=y_h(x)+y_p(x)=e^{3x}(A\cos x+B\sin x)+3\cos x-2\sin x+1$.

9. Taylorpolynomet har formen $p_2(x)=f(1)+f'(1)(x-1)+\frac{f''(1)}{2!}(x-1)$. Vi deriverar implicit map x två gånger för att bestämma derivatorna :
   $y'+e^{y-2}y'=-5e^{1-x}-1\Rightarrow y''+e^{y-2}(y')^2+e^{y-2}y''=5e^{1-x}$. Vi ser att $x=1$ svarar mot $y=2$.
   Insättning av punkten (1,2) i den första ekvationen ger $y'=-3$. Den andra ger då $y''=-2$.

Det sökta Taylorpolynomet är alltså $p_2(x) = 2 - 3(x-1) - (x-1)^2$.

10. Planens normalvektorer är (3,1,2) resp (6,2,4) dvs planen är parallella.Låt $\overline{n} = (3,1,2)$.
Vi väljer punkterna $P(1,0,1)$ och $Q(1,1,1)$ i vardera planet och bildar vektorn $\overline{u} = (0,1,0)$ från P till Q . Det sökta avståndet ges då av längden av projektionsvektorn
$proj_{\overline{n}}\overline{u} = \dfrac{(\overline{u} \cdot \overline{n})}{\|\overline{n}\|^2}\overline{n} = \dfrac{0 \cdot 3 + 1 \cdot 1 + 0 \cdot 2}{3^2 + 1^2 + (2)^2}(3,1,2) = \dfrac{1}{14}(3,1,2)$. Det sökta avståndet är alltså
$\dfrac{1}{14}\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2} = \dfrac{1}{\sqrt{14}}$ $l.e$.

11. Under tidsintervallet dt är nettoinflödet $dV = (i(t) - u(t))dt$. Det ger

$$\frac{dV}{dt} = \frac{1}{4t^2+1} - \frac{1}{(2t+1)^2} \Rightarrow V(t) = \int (\frac{1}{4t^2+1} - \frac{1}{(2t+1)^2})dt = \frac{1}{2}\arctan(2t) + \frac{1}{2}\frac{1}{2t+1} + C.$$

$V(0) = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow V(t) = \dfrac{1}{2}(\arctan(2t) + \dfrac{1}{2t+1} - 1)$. Vi observerar att
$\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{1}{4t^2+1} - \dfrac{1}{4t^2+1+2t} > 0$ för $t > 0$ dvs volymen ökar med t . Eftersom
$\lim_{t \to \infty} V(t) = \dfrac{1}{2}(\dfrac{\pi}{2} - 1) = \dfrac{\pi - 2}{4} < 1$ blir tanken aldrig full.