Lösningar till tentamen i kurs 5B1130 Matematiska metoder I, för S 050205

Del 1

1. $\det C^T = \det C = \det A^{-1} \det B^2 = \dfrac{1}{\det A} \cdot (\det B)^2 \Rightarrow \det A = \dfrac{(\det B)^2}{\det C} = 9.$

2. Då måste (x,y,z) vara samma i båda ekvationerna. Det ger
$3 + s = 4 + 2t$, $1 - 2s = 6 + 3t$, $3 + 3s = 1 + t$. Ur detta får vi systemet
$$\begin{cases} s - 2t = 1 \\ 2s + 3t = -5 \\ 3s - t = -2 \end{cases} \Rightarrow s = t = -1$$
. Det ger skärningspunkten $(2,3,0)$. Vinkeln ges av
$$(1,-2,3) \cdot (2,3,1) = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2}\sqrt{2^2 + 3^2 + 1^2} \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = -\frac{1}{14}.$$

3. Implicit derivering ger $(1 + y')e^{xy} + (x + y)e^{xy}(y + xy') = 0$. Ur den givna ekvationen fås genom insättning av $x = 0$ att $y(0) = 1$ vilket ger $1 + y'(0) + 1 = 0 \Rightarrow y'(0) = -2$.

4. Maclaurinpolynomet ges av $p_2(x) = f(0) + f'(0)x + \dfrac{f''(0)}{2!}x^2$ där $f(x) = \ln(1 + x^2)$. Vi får $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x \Rightarrow f''(x) = 2\dfrac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} \Rightarrow p_2(x) = x^2$. Arean ges av
$$\int_0^{1/2} \ln(1 + x^2)\,dx \approx \int_0^{1/2} x^2\,dx = \frac{1}{24}\,ae.$$

5.
$$\int \sqrt{x}\cos\sqrt{x}\,dx = \begin{bmatrix} u = \sqrt{x} \\ 2u\,du = dx \end{bmatrix} = 2\int u^2 \cos u\,du = \{partiellt\} = 2(u^2 \sin u - 2\int u \sin u\,du) =$$
$$= 2u^2 \sin u - 4(-u\cos u + \int \cos u\,du) = 2u^2 \sin u + 4u\cos u - 4\sin u + C =$$
$$= (2x - 4)\sin\sqrt{x} + 4\sqrt{x}\cos\sqrt{x} + C.$$

6. Serien är positiv. För stora n uppför sig seriens termer som $\dfrac{1}{2n}$. Det är då lämpligt att jämföra med serien $\sum \dfrac{1}{n}$. Vi beräknar då $\lim_{n\to\infty} \dfrac{n^3 + 3n^2}{2n^4 + 1} \cdot \dfrac{n}{1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{n^4 + 3n^3}{2n^4 + 1} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{3}{n}}{2 + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{1}{2}$.
Då jämförelseserien är divergent är även den givna serien det enligt ”limit comparison test”.

7. Definitionsområdet är intervallet $-1 \le x \le 1$. $f'(x) = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Lokala extrempunkter är kritiska, singulära eller ändpunkter. Vi har två ändpunkter (tillika singulära) : $x = -1$, 1 . Då derivatan är negativ till höger om $x = -1$ är detta en maxpunkt eftersom funktionen då är avtagande.Till vänster om $x = 1$ är derivatan också negativ dvs detta är en minpunkt.

Vi söker kritiska punkter: $f'(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{1-x^2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $f''(x) = -\dfrac{x}{(1-x^2)^{3/2}}$.

Då $f''(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}) > 0$, $f''(\dfrac{\sqrt{3}}{2}) < 0$ är dessa min- resp maxpunkter.

8. Vi opererar med A^{-1} från höger och B^{-1} från vänster och får $X = B^{-1}A^{-1} = (AB)^{-1}$. Vi beräknar produktmatrisen och får $AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$. Dess invers beräknas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 17 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -5 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & 2 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -7 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 20 & -14 & -49 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 5 & 17 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -7 \end{array}\right).$$

Matrisen till höger om enhetsmatrisen är vår sökta X.

Del 2

9. Homogena problemets karakteristiska ekvation är $r^2 - 5r + 4r = 0 \Rightarrow r = 1,4$. Det ger $y_h(x) = Ae^x + Be^{4x}$. Vi har ”resonans” och ansätter därför $y_p(x) = axe^x \Rightarrow y_p'(x) = a(x+1)e^x \Rightarrow y_p''(x) = a(x+2)e^x$. Insättning i diffekvationen ger $ae^x\left[x + 2 - 5(x+1) + 4x\right] = 8e^x \Rightarrow a = -\dfrac{8}{3} \Rightarrow y_p(x) = -\dfrac{8}{3}xe^x$ och den allmänna lösningen är $y(x) = y_h(x) + y_p(x) = (A - \dfrac{8}{3}x)e^x + Be^{4x}$. $y(0) = 0 \Rightarrow A + B = 0$. Det ger $y(x) = (A - \dfrac{8}{3}x)e^x - Ae^{4x} \Rightarrow y'(x) = -\dfrac{8}{3}e^x + (A - \dfrac{8}{3}x)e^x - 4Ae^{4x}$. $y'(0) = 0$ ger nu

$-\dfrac{8}{3} - 3A = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{8}{9} \Rightarrow B = \dfrac{8}{9} \Rightarrow y(x) = \dfrac{8}{9}\left[e^{4x} - (3x+1)e^x\right]$.

10. Vi ser att $z = 1$ är en rot. Division med z -1 ger faktorn $z^2 - iz + 1 + 3i$. Vi löser nu ekv

$z^2 - iz + 1 + 3i = 0$. Kvadratkomplettering ger $(z - \frac{i}{2})^2 = -\frac{5}{4} - 3i$. Med $z - \frac{i}{2} = x + iy$ (1)

fås $\begin{cases} x^2 - y^2 = -\frac{5}{4} & (2) \\ 2xy = -3 & (3) \\ x^2 + y^2 = \frac{13}{4} & (4) \quad (x^2 + y^2 = \left|-\frac{5}{4} - 3i\right|) \end{cases}$ (2)+(4) ger $2x^2 = \frac{8}{4} \Rightarrow x = \pm 1$. Det ger

enligt (3) : $y = \mp \frac{3}{2}$. (1) ger $z_1 = 1 - \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = 1 - i$, $z_2 = -1 + \frac{3}{2}i + \frac{i}{2} = -1 + 2$. Rötterna är alltså $z = 1$, $1 - i$, $-1 + 2i$.

11. Vi ser att funktionens definitionsområde är intervallet $-2 \le x \le 2$ och att den är antisymmetrisk. Det ger två lika stora volymer på var sida om origo. Volymen ges

$$2\pi \int_0^2 x^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx = \begin{bmatrix} x = 2\sin u \\ dx = 2\cos u\, du \end{bmatrix} = 32\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \sqrt{1 - \sin^2 u} \cos u\, du =$$

då av $$= 32\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 u \cos^2 u\, du = 8\pi \int_0^{\pi/2} \sin^2 2u\, du = 4\pi \int_0^{\pi/2} (1 - \cos 4u)\, du =$$

$$= 4\pi \left[u - \frac{\sin 4u}{4} \right]_0^{\pi/2} = 2\pi^2 \ ve.$$

12. Först bestämmer vi konvergensradien R : $\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{1}{2n+3} + e^{-(n+1)}}{\frac{1}{2n+1} + e^{-n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + (2n+3)e^{-(n+1)}}{1 + (2n+1)e^{-n}} \cdot \frac{2n+1}{2n+3} = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow R = 1$. Dvs serien är konvergent för -1< x <1 och divergent för x < -1 och x >1. Det återstår att undersöka fallen x =1 och x = -1:

$x = -1$: $\sum_{n=0}^{\infty} (\frac{1}{2n+1} + e^{-n})(-1)^n$. Låt $a_n = \frac{1}{2n+1} + e^{-n}$. $a_n > 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ och

$a_{n+1} < a_n$, $n = 0,1,2,3...$: $\frac{1}{2n+3} + e^{-(n+1)} < \frac{1}{2n+1} + e^{-n}$ ty $\frac{1}{2n+3} < \frac{1}{2n+1}$ och $e^{-(n+1)} < e^{-n}$ för $n = 0,1,2,3\ldots$ Enligt Leibniz´ sats om alternerande serier är då serien konvergent för x = -1.

$x = 1$: $\quad \sum_{n=0} \left(\frac{1}{2n+1} + e^{-n}\right) > \sum_{n=0} \frac{1}{2n+1} > \sum_{n=0} \frac{1}{3n} = \frac{1}{3} \sum_{n=0} \frac{1}{n}$ som är divergent (p=1).

Potensserien är då divergent för $x = 1$ enligt ”comparison test”. Potensserien är alltså konvergent för $-1 \le x < 1$.