

# AUTONOMA SYSTEM, FASPORTRÄTT OCH KLYSNAFENOMEN

INGEMAR NÅSELL

SAMMANFATTNING. Dessa föreläsningssanteckningar ger vissa kompletteringar till avsnitten 9.1 och 9.3 i kursboken av Boyce och diPrima. Vi inför namn på de viktiga mångfalder som uppträder vid noder och sadelpunkter. Vidare ersätter vi den komplicerade satsen 9.3.2 i kursboken med ett alternativ som är lättare att förstå och mera användbart. Vi ger också en begreppsmässig grund för behandlingen av klysnafenomen.

## 1. AUTONOMA SYSTEM

Detta avsnitt av kursen handlar om system av differentialekvationer av första ordningen. Vi begränsar oss till två-dimensionella system i formen

$$\begin{aligned}x' &= F(x, y), \\y' &= G(x, y),\end{aligned}$$

där  $F$  och  $G$  är två givna funktioner. Primtecknen används för att beteckna derivatorna av tillståndsvariablerna  $x$  och  $y$  med avseende på tiden  $t$ .

Systemet kan skrivas i kompaktare form genom att införa vektorer. Vi definierar  $\mathbf{u}$  som en kolumnvektor med komponenterna  $x$  och  $y$ , och vi bildar en kolumnvektor  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  av de två högerleden  $F(x, y)$  och  $G(x, y)$ . Vi skriver alltså

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \mathbf{f}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} F(x, y) \\ G(x, y) \end{pmatrix}.$$

Notera att  $\mathbf{f}$  är en vektorvärd funktion av den vektorvärda variabeln  $\mathbf{u}$ . Med dessa beteckningar kan ekvationssystemet skrivas på följande sätt:

$$(1.1) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u}).$$

Systemet säges vara **autonomt** eftersom högerledet är oberoende av tiden  $t$ . Detta är en viktig förutsättning för vårt fortsatta studium.

---

*Date:* November 14, 2000.

Funktionen  $\mathbf{f}$  antages definierad i någon domän av  $x$ - $y$ -planet. I de flesta exempel som vi skall se kommer definitionsdomänen för  $\mathbf{f}$  att vara hela  $x$ - $y$ -planet. Vi låter  $\mathbf{u}_0 = (x_0, y_0)^T$  vara en punkt i den domän där  $f$  är definierad och formulerar initialvillkoret

$$(1.2) \quad \mathbf{u}(t_0) = \mathbf{u}_0.$$

Ett tillräckligt villkor för att initialvärdesproblemet som bildas av ekvationssystemet (1.1) med initialvillkoret (1.2) har en entydig lösning på något intervall som innehåller initialtidpunkten  $t_0$  är att derivatan av första ordningen av  $\mathbf{f}$  m.a.p.  $\mathbf{u}$  är kontinuerlig. Detta villkor skrives  $\mathbf{f} \in C^1$ . Det är ekvivalent med att partiella derivatorna av första ordningen av  $F$  och  $G$  m.a.p.  $x$  och  $y$  är kontinuerliga.

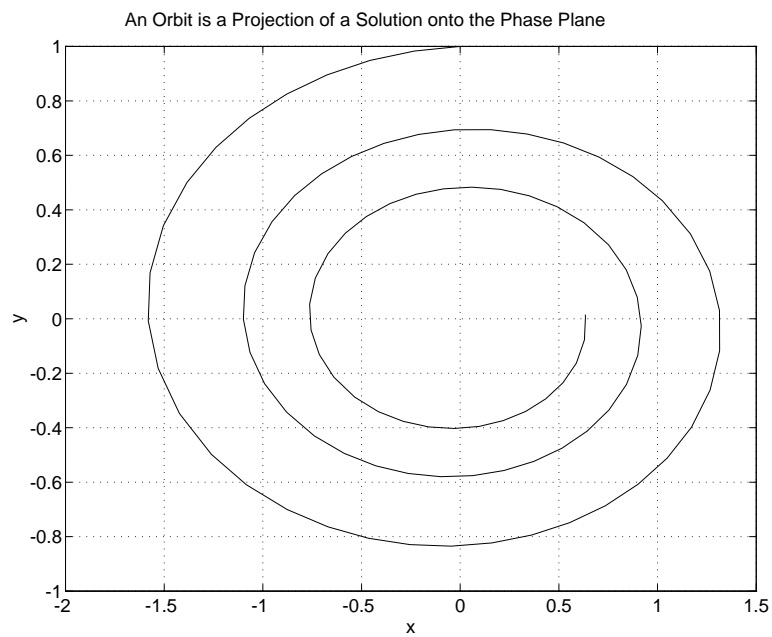
Boyce och diPrima inför i Avsnittet 9.3 antagandet att systemet (1.1) är vad de kallar ett nästan linjärt system. Deras definition av ett nästan linjärt system har fyra ingredienser, av vilka den viktigaste är att  $\mathbf{f} \in C^1$ .

Vi antar inför fortsättningen att  $\mathbf{f} \in C^2$ , d.v.s. att alla partiella derivator av andra ordningen av  $F$  och  $G$  m.a.p.  $x$  och  $y$  är kontinuerliga. Detta antagande är uppfyllt för alla problem som vi studerar. Detta regularitetsantagande medför en avsevärd förenkling av linjariseringsatsen 9.3.2 i kursboken av Boyce och diPrima. Kursbokens "nästan linjära system" används inte i fortsättningen. Några kritiska kommentarer kring detta begrepp ges dock i Avsnitt 3.3.

Vi noterar att lösningen  $\mathbf{u}(t)$  till initialvärdesproblemet (1.1) och (1.2) lever i det tredimensionella rummet av punkter  $(t, x, y)$ . En illustration av detta ges i Figur 1, där vi låter tidsaxeln vara vertikal. I fortsättningen kommer vi att projicera alla lösningskurvor på  $x$ - $y$ -planet, det s.k. fasplanet. Figur 2 visar projektionen av lösningen i Figur 1 på fasplanet. Vi har två olika namn för sådana projektioner, nämligen bana och trajektoria. En trajektoria är en projektion som är parametriserad med tiden, medan en bana (orbit på engelska) är en projektion där tiden har eliminerats. Vi kräver dock att man känner den riktning i vilken man rör sig på banan när tiden ökar. Skillnaden mellan trajektoria och bana kan åskådliggöras med en satellit. Antag att du vid ett visst ögonblick vill ta emot en signal från en satellit. Då räcker det inte att du känner satellitens bana; du behöver den ytterligare information som ligger i trajektorians tidsparametrisering. Boyce och diPrima använder namnet "trajectory" i samma betydelse som vi lägger i ordet "bana". Vi använder banor i fortsättningen.



FIGUR 1. Lösningen till ett system av differentialekvationer av första ordningen i planet åskådliggörs i tre dimensioner.



FIGUR 2. Banan här är projektionen av lösningen i Figur 1 på fasplanet.

Märk att en stationär lösning  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}_0$  ger upphov till en bana som består av den enda punkten  $\mathbf{u}_0$ . En sådan punkt är en lösning till

ekvationssystemet  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) = \mathbf{0}$  och kallas för en kritisk punkt. De kritiska punkterna spelar en viktig roll i fortsättningen.

En viktig egenskap hos de autonoma systemen är att skilda banor inte skär varann. Motsvarande resultat gäller inte om ekvationssystemets högerled varierar med tiden. En konsekvens är att ingen bana som inte startar i en kritisk punkt  $\mathbf{u}_0$  (som ju bildar en bana) innehåller denna kritiska punkt.

I den tidigare delen av kursen i differentialekvationer har målsättningen ofta varit att bestämma en explicit lösning till en differentialekvation med givet initialvärde. När det gäller autonoma system intar vi en annan ståndpunkt. För det första är det mycket ovanligt att ett ickelinjärt system av differentialekvationer har en lösning som kan uttryckas explicit med hjälp av kända funktioner. Dessutom, även om en sådan lösning existerar så är det mycket osannolikt att den ger information om lösningens beteende i användbar form. Därför försöker vi överhuvudtaget inte att hitta explicita lösningar till ickelinjära system av differentialekvationer. Vi söker i stället information om lösningarnas beteende på annat sätt. Som nämnts ovan studerar vi banorna i stället för lösningskurvorna. Med avseende på initialvärdena för ekvationssystemet intar vi en mera krävande ståndpunkt. Vi söker nu, åtminstone i princip, information om beteendet hos ekvationssystemets banor för alla tänkbara initialvärden. Mängden av dessa banor kallas för **fasporträttet**. En målsättning för analysen av ett autonomt system av differentialekvationer är att bestämma fasporträttet.

Vi fortsätter i nästa avsnitt med att beskriva fasporträtten för linjära system. Vi vänder oss därefter till de ickelinjära systemen, och visar hur linjarisering används för att bestämma de lokala fasporträtten för ickelinjära system i närheten av kritiska punkter. Villkoren för att det linjariserade systemet har samma typ av fasporträtt som det ursprungliga är nära förknippade med de s.k. klysnafenomenen. Dessa hör till de intressantaste i den ickelinjära analysen. De behandlas inte i läroboken av Boyce och diPrima, men de får en liten introduktion i dessa föreläsningssanteckningar. Det visar sig att det är lättare att få en överblick över fasporträttsproblematiken om vi är medvetna om de associerade klysnafenomenen.

Ordet klyсна är hämtat från en daladialekt (nåsmålet). Det används där som namn på det naturgeografiska fenomen som på latin heter bifurkation och som består i att en flod delar sig i två separata grenar.

## 2. FASPORTRÄTT FÖR LINJÄRA SYSTEM

När ekvationssystemet (1.1) är linjärt och homogent så kan det skrivas i formen

$$(2.1) \quad \mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u},$$

där  $\mathbf{A}$  är en given konstant  $2 \times 2$  matris.

Det är viktigt att förstå hur fasporträttet ser ut för detta linjära system när vi behandlar icke-linjära system i nästa avsnitt. Det finns fem huvudtyper av fasporträtt. Vi delar in dem i två grupper på basis av följande observation.

Vi använder oss av det viktiga resultatet att  $\mathbf{u}(t) = \exp(\lambda t)\mathbf{u}^1$  är en lösning till ekvationssystemet (2.1) om  $\lambda$  är ett egenvärde till matrisen  $\mathbf{A}$  med egenvektorn  $\mathbf{u}^1$ . Hur beter sig denna lösning när  $t \rightarrow \infty$ ? För att svara på den frågan studerar vi beteendet hos funktionen  $|\exp(\lambda t)|$  när  $t \rightarrow \infty$ , där  $\lambda$  är en parameter som tillåts vara komplexvärd. Vi inser lätt att det finns följande tre möjligheter:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} |\exp(\lambda t)| = \begin{cases} \infty, & \Re(\lambda) > 0, \\ 1, & \Re(\lambda) = 0, \\ 0, & \Re(\lambda) < 0. \end{cases}$$

Vi drar härav slutsatsen att varje enskild bana beter sig på ett av tre kvalitativt olika sätt när  $t \rightarrow \infty$ . I det första fallet avlägsnar den sig obegränsat från origo, i det andra fallet är den begränsad utan att närma sig origo, och i det tredje fallet närmar den sig origo. Alla banor är av de första eller tredje slaget om inget egenvärde hos matrisen  $\mathbf{A}$  har realdelen noll, medan banor av det andra slaget uppträder om något egenvärde har realdelen noll.

De första och tredje fallen har ett gemensamt robust beteende som saknas i det andra fallet. Robustheten visar sig i att banans beteende för stora  $t$ -värden är kvalitativt oförändrat om vi gör små förändringar av ett eller flera av elementen i matrisen  $\mathbf{A}$ . Å andra sidan kommer redan en mycket liten ändring av något av matrisens element i det tredje fallet att kunna medföra att realdelen av egenvärdet avviker från noll och att banans beteende för stora  $t$ -värden ändras dramatiskt.

Dessa två kvalitativt olika beteenden hos de enskilda banorna ligger till grund för vår uppdelning av fasporträtten i två grupper. Vi inför följande definition.

**Definition:** Origo kallas för en **hyperbolisk** kritisk punkt till ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$  om inget egenvärde till matrisen  $\mathbf{A}$  ligger på den imaginära axeln. Om däremot ett eller flera egenvärden har realdelen noll kallas origo för en **ickehyperbolisk** kritisk punkt.

Begreppen hyperbolisk och ickehyperbolisk finns inte med i kursboken av Boyce och diPrima. Vi använder dessa begrepp i beskrivningen av fasporträtten. Härmed gör vi också en förberedelse för att ersätta den komplicerade linjariseringssatsen 9.3.2 i kursboken med ett enklare alternativ.

Vi fortsätter med att beskriva de möjliga fasporträtten. Vi kompletterar kursbokens beskrivning med att införa namn på de viktiga mångfalden som uppträder när egenvärdena till matrisen  $\mathbf{A}$  är reella och distinkta och skilda från noll. Origo är hyperbolisk för tre av våra huvudtyper och ickehyperbolisk för två.

Vi börjar med att studera fasporträtten när origo är hyperbolisk.

**2.1. Huvudtyp I: Sadel.** Matrisen  $\mathbf{A}$  har i detta fall två reella egenvärden med olika tecken. Origo är hyperbolisk eftersom vi utesluter möjligheten att något av egenvärdena är lika med noll. Vi betecknar det positiva egenvärdet med  $r_1$  och det negativa med  $r_2$ . Vi har alltså följande relation mellan egenvärdena:  $r_2 < 0 < r_1$ . Eftersom egenvärdena är distinkta vet vi att de motsvarande egenvektorerna  $\mathbf{u}^1$  och  $\mathbf{u}^2$  är linjärt oberoende.

Den allmänna lösningen till systemet (2.1) kan skrivas

$$(2.2) \quad \mathbf{u}(t) = c_1 \exp(r_1 t) \mathbf{u}^1 + c_2 \exp(r_2 t) \mathbf{u}^2,$$

där  $c_1$  och  $c_2$  är godtyckliga konstanter som bestäms av initialpunkten  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$ .

För sadelpunkten definierar vi två mångfalden på följande sätt:

**Den instabila mångfalden** är den räta linje genom origo vars lutning ges av egenvektorn ( $\mathbf{u}^1$ ) som hör till det positiva egenvärdet.

**Den stabila mångfalden** är den räta linje genom origo vars lutning ges av egenvektorn ( $\mathbf{u}^2$ ) som hör till det negativa egenvärdet.

Vi noterar att var och en av mångfalderna kan skrivas som unionen av tre banor, varav en består av en enda punkt, nämligen den kritiska punkten origo, och de två andra är linjesegment på ömse sidor om origo.

Om initialpunkten väljes på en av dessa mångfalden så kommer banan för all tid att ligga på samma mångfald.

Det framgår av (2.2) att banan närmar sig origo när tiden växer om initialpunkten ligger på den stabila mångfalden ( $c_1 = 0$ ), och att banan avlägsnar sig från origo när tiden har nått tillräckligt stora värden om initialpunkten inte ligger på den stabila mångfalden ( $c_1 \neq 0$ ).

Fasporträttet hos en sadelpunkt har följande viktiga egenskaper:

**Sadelpunktens huvudegenskap:**

Varje bana vars initialpunkt inte ligger på den stabila mångfalden kommer för tillräckligt stora  $t$ -värden att avlägsna sig från origo i riktning av den instabila mångfalden.

För att bevisa detta noterar vi från (2.2) att den allmänna lösningen kan skrivas

$$(2.3) \quad \mathbf{u}(t) = \exp(r_1 t)(c_1 \mathbf{u}^1 + c_2 \exp((r_2 - r_1)t)\mathbf{u}^2).$$

Om  $c_1 \neq 0$  så kommer uttrycket inom parentes att närma sig  $c_1 \mathbf{u}^1$  när  $t \rightarrow \infty$  eftersom  $r_2 - r_1 < 0$ .

Ett fasporträtt för en sadelpunkt visas i kursbokens Figur 9.1.2. Använd sadelpunktens huvudegenskap för att bestämma vilken av de två inritade mångfalderna som är den stabila och vilken som är den instabila!

Notera att de stabila och instabila mångfalderna byter roller om tiden reverseras. Efter lång tid kommer nästan varje bana att ligga nära den instabila mångfalden. För länge sedan låg nästan varje bana nära den stabila mångfalden.

**2.2. Huvudtyp II: Spiral.** Matrisen  $\mathbf{A}$  har i detta fall komplexkonjugata egenvärden som kan skrivas  $r = \alpha \pm i\beta$ . Origo är hyperbolisk eftersom vi utesluter möjligheten att något av egenvärdena hamnar på reella axeln genom att kräva att  $\alpha \neq 0$ . Utan att förlora i generalitet antar vi att  $\beta > 0$ . Om vi associerar plustecknet med egenvärdet  $r_1$  så får vi  $r_1 = \alpha + i\beta$ . Den motsvarande egenvektorn skrives  $\mathbf{u}^1 = \mathbf{v} + i\mathbf{w}$ , där  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  är reella kolumnvektorer. En lösning till ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$  kan formellt skrivas i formen  $\mathbf{u}(t) = \mathbf{u}^1 \exp(r_1 t) = (\mathbf{v} + i\mathbf{w})(\cos \beta t + i \sin \beta t) \exp(\alpha t)$ . Denna lösning är svår att tolka, eftersom den är komplexvärd. Realdel och imaginärdel av lösningen är däremot användbara. De kan uttryckas på följande sätt:

$$\begin{aligned} \Re(\mathbf{u}(t)) &= \mathbf{U}^1(t) = (\mathbf{v} \cos(\beta t) - \mathbf{w} \sin(\beta t)) \exp(\alpha t), \\ \Im(\mathbf{u}(t)) &= \mathbf{U}^2(t) = (\mathbf{w} \cos(\beta t) + \mathbf{v} \sin(\beta t)) \exp(\alpha t). \end{aligned}$$

Dessa uttryck härleds, med andra beteckningar, i kursboken 7.6. Eftersom  $\mathbf{U}^1(t)$  och  $\mathbf{U}^2(t)$  är linjärt oberoende kan varje lösning skrivas som en linjärkombination av dem. Vi har alltså  $\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{U}^1(t) + c_2 \mathbf{U}^2(t)$ . Detta uttryck för allmänna lösningen kan skrivas i formen

$$(2.4) \quad \mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} R_1 \cos(\beta t - \delta_1) \\ R_2 \cos(\beta t - \delta_2) \end{pmatrix} \exp(\alpha t),$$

där  $R_1 \geq 0$ ,  $R_2 \geq 0$ ,  $\delta_1$  och  $\delta_2$  bestäms från  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $\mathbf{v}$  och  $\mathbf{w}$  via det elementära resultatet att uttrycket  $a \cos \omega t + b \sin \omega t$  kan uttryckas i formen  $R \cos(\omega t - \delta)$ .

Det finns två typer av spiraler. Spiralen är asymptotiskt stabil om  $\alpha < 0$  och instabil om  $\alpha > 0$ . Varje bana närmar sig origo när tiden växer om spiralen är stabil. Varje bana som inte sammanfaller med origo avlägsnar sig från origo när tiden växer om spiralen är instabil.

Varje spiral roterar antingen medsols eller motsols runt origo. Rotationsriktningen kan lätt bestämmas från en av de två ekvationer som ingår i det givna ekvationssystemet. Det visar sig att det räcker att bestämma tecknet för ett av elementen i matrisen  $A$ . Vi använder oss av den första av de två givna ekvationerna. Denna kan skrivas  $x' = ax + by$ . Rotationsriktningen är medsols om varje bana passerar den positiva  $y$ -axeln riktad in i den första kvadranten. Vi väljer initialpunkten  $(0, 1)$  på positiva  $y$ -axeln. I denna punkt har vi  $x' = b$ . Banan i denna punkt är riktad in i första kvadranten om  $x' > 0$ . Vår slutsats är att spiralen roterar medsols om  $b > 0$ .

Exempel på fasporträtt för spiraler ges i kursboken i Figurerna 9.1.5 och 9.1.6.

**2.3. Huvudtyp III: Nod.** Matrisen  $\mathbf{A}$  har i detta fall två reella egenvärden  $r_1$  och  $r_2$  med samma tecken. Origo är hyperbolisk eftersom vi utesluter möjligheten att något av egenvärdena är lika med noll. Vi får olika typer av fasporträtt beroende på dels tecknen hos de två egenvärdena, dels om egenvärdena är distinkta eller om den karakteristiska ekvationen har dubbelrot.

2.3.1. *IIIA. Egentlig nod.* Noden är egentlig när egenvärdena är distinkta. I detta fall finns det två linjärt oberoende egenvektorer. De egenvektorer som svarar mot egenvärdena  $r_1$  och  $r_2$  benämns  $\mathbf{u}^1$  respektive  $\mathbf{u}^2$ . Vi använder  $r_1$  för att beteckna det egenvärde vars absolutbelopp är minst. Vi har alltså  $0 < |r_1| < |r_2|$ .

Det finns två typer av egentliga noder med motsatta stabilitetsegenskaper. Den egentliga noden är **asymptotiskt stabil** om egenvärdena är negativa och **instabil** om egenvärdena är positiva. (Vi skriver i fortsättningen ofta stabil i stället för asymptotiskt stabil.) Den allmänna lösningen till  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$  kan även i detta fall uttryckas med hjälp av (2.2). Denna allmänna lösning visar att när tiden växer så kommer varje bana att närma sig origo för den stabila noden. Varje bana utom den kritiska punkten origo själv avlägsnar sig från origo när tiden växer om noden är instabil.

Vi definierar två mångfalden på följande sätt:

**Den långsamma mångfalden** är den räta linje genom origo vars lutning ges av den egenvektor ( $\mathbf{u}^1$ ) som hör till det egenvärde vars belopp är minst.

**Den snabba mångfalden** är den räta linje genom origo vars lutning ges av den egenvektor ( $\mathbf{u}^2$ ) som hör till det egenvärde vars belopp är störst.

Om initialpunkten  $\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0$  väljes på en av dessa mångfalder så kommer hela banan att ligga på samma mångfald för alla värden på  $t$ .

Benämningarna långsam och snabb utsäger att man rör sig med större hastighet på den snabba mångfalden än på den långsamma.

Notera att fasporträttet för en instabil egentlig nod har samma form som fasporträttet för en stabil egentlig nod. Den enda skillnaden är att alla rörelser går från den kritiska punkten i stället för mot den. En instabil nod kan förvandlas till en stabil nod genom att låta tiden byta riktning.

En viktig egenskap hos fasporträttet för en egentlig nod kan beskrivas på följande sätt:

**Den egentliga nodens huvudegenskap:**

Varje bana som inte ligger på den snabba mångfalden tangerar den långsamma mångfalden i origo.

Beviset för den egentliga nodens huvudegenskap följer från (2.3).

Denna egenskap medför att om en egentlig nod är stabil så kommer varje bana vars initialpunkt inte ligger på den snabba mångfalden att närma sig origo i riktning av den långsamma mångfalden när tiden växer.

Ett fasporträtt för en stabil egentlig nod visas i kursbokens Figur 9.1.1. Använd nodens huvudegenskap för att bestämma vilken av de två inritade mångfalderna som är den långsamma och vilken som är den snabba!

Den långsamma mångfalden vid en stabil nod och den instabila mångfalden vid en sadelpunkt har en egenskap gemensam, nämligen att nästan alla banor närmar sig dem när tiden går framåt. (Undantagen gäller om initialpunkten ligger exakt på den snabba respektive den stabila mångfalden.)

Den snabba mångfalden vid en stabil nod och den stabila mångfalden vid en sadelpunkt påminner också om varandra. Båda är undantagsmängder i huvudegenskapen för respektive typ av fasporträtt. Dessutom är båda svåra att hitta om man ligger långt ifrån den kritiska punkten och låter tiden gå framåt. Om man vill inkludera banorna på dessa mångfalder när man ritar fasporträtt med hjälp av t.ex. Maple så är det därför lämpligt att lägga sig på eller nära respektive mångfald nära den kritiska punkten och låta tiden gå baklänges.

2.3.2. *IIIB. Gränshallsnoder.* Den karakteristiska ekvationen för matrisen  $\mathbf{A}$  har i detta fall en dubbelrot  $r$  som är reell och skild från noll.

Fyra olika typer av fasporträtt uppträder, beroende på om egenvärdet  $r$  är positivt eller negativt eller om det är defekt eller inte. Noden är stabil om  $r < 0$  och instabil om  $r > 0$ . Ett egenvärde som är en multipelrot till en karakteristisk ekvation med multipliciteten  $k$  kallas defekt om antalet linjärt oberoende egenvektorer som kan associeras med detta egenvärde är mindre än  $k$ . I vårt fall är  $k = 2$  och egenvärdet  $r$  är alltså defekt om egenrummet är endimensionellt. Fasporträttet för detta fall kallas för en oegentlig nod. En illustration av ett sådant ges i kursbokens Figur 9.1.4.

Det enda fall i vilket egenvärdet  $r$  inte är defekt är när matrisen  $\mathbf{A}$  kan skrivas som  $r$  gånger enhetsmatrisen. I detta fall är varje vektor som är skild från nollvektorn en egenvektor. Ingen riktning har någon speciell betydelse. Fasporträttet kallas för en stjärnformad nod. Ett exempel ges i kursbokens Figur 9.1.3.

Gränsfallsnoderna uppstår som gränsfall mellan noder (med två betydelsefulla riktningar givna av den långsamma och den snabba mångfalden) och spiraler (som inte har några intressanta riktningar).

Våra benämningar för de olika typerna av noder överensstämmer inte med ordagranna översättningar från engelska till svenska av de benämningar som används av Boyce och diPrima. Vi noterar först att Boyce och diPrima benämner den egentliga noden "improper". Men det finns ingenting oegentligt med denna nod. Den visar vad vi kan kalla typiskt nod-beteende, med en långsam och en snabb mångfald.

Boyce och diPrima kallar den oegentliga noden (när egenvärdet är defekt) för "improper". Här överensstämmer våra benämningar.

Den stjärnformade noden kallas "proper" av Boyce och diPrima. Som vi har antytt ovan reserverar vi det motsvarande svenska ordet "egentlig" för de noder där matrisernas karakteristiska ekvationer har distinkta rötter med samma tecken.

**2.4. Huvudtyp IV: Center.** Matrisen  $\mathbf{A}$  har i detta fall rent imaginära egenvärden. Banorna är cirklar eller ellipser, och de motsvarande lösningarna  $u(t)$  är periodiska funktioner av  $t$ . Den allmänna lösningen kan formuleras med hjälp av det resultat som har givits i (2.4) för spiralen genom att sätta  $\alpha = 0$ . Centret har en vagare form av stabilitet än de fasporträttyper som är asymptotiskt stabila. Centret kallas **neutralt stabilt**. Boyce och diPrima använder termen "stable" utan epitet.

Ett fasporträtt för ett center visas i kursboken i Figur 9.1.7.

Centret uppträder som gränsfall mellan stabila och instabila spiraler.

Rotationsriktningen i ett center bestäms på samma sätt som i en spiral.

**2.5. Huvudtyp V: Degenererade fasporträtt.** Matrisen  $\mathbf{A}$  har i detta fall ett eller två egenvärden som är lika med noll. Detta betyder att determinanten för  $\mathbf{A}$  är lika med noll och att matrisen  $\mathbf{A}$  inte är inverterbar. En konsekvens av detta är att ekvationssystemet (2.1) inte bara har origo som kritisk punkt. Nollrummet till matrisen  $\mathbf{A}$ , som är lösningen till ekvationen  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{0}$ , består antingen av en rät linje genom origo (om nollrummet är endimensionellt) eller av hela  $x - y$ -planet (om nollrummet är tvådimensionellt). Varje punkt i nollrummet är en kritisk punkt till differentialekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$ .

Den allmänna lösningen kan formuleras med hjälp av uttrycket (2.2). För att illustrera ett konkret fall antar vi att matrisens egenvärden satisfierar  $r_2 < r_1 = 0$ . Den allmänna lösningen blir då

$$\mathbf{u}(t) = c_1 \mathbf{u}^1 + c_2 \exp(r_2 t) \mathbf{u}^2$$

eftersom  $r_1 = 0$ . Det är lätt att se att den mot denna lösning svarande banan är ett linjesegment som närmar sig punkten  $c_1 \mathbf{u}^1$  när  $t \rightarrow \infty$ , eftersom  $r_2 < 0$ . Alla banor utgörs alltså av parallella linjesegment, vars lutningar ges av lutningen hos egenvektorn  $\mathbf{u}^2$  som svarar mot det negativa egenvärdet  $r_2$ . Varje bana närmar sig en kritisk punkt på nollrummet till  $\mathbf{A}$ , som i detta fall är en rät linje genom origo vars lutning sammanfaller med lutningen hos egenvektorn  $\mathbf{u}^1$ .

Detta fasporträtt uppträder som gränsfall mellan en stabil nod och en sadelpunkt. Övergången från den stabila noden till sadelpunkten kan beskrivas på följande sätt: Liksom ovan låter vi den stabila nodens egenvärden satisfiera olikheten  $r_2 < r_1 < 0$ . Låt nu  $r_1$  öka medan  $r_2$  ligger fast. Då minskar rörelsehastigheten på den långsamma mångfalden. När  $r_1$  når värdet 0 har rörelsen på den långsamma mångfalden upphört helt. Fasporträttet är nu av den degenererade typ som vi behandlar i detta avsnitt. När  $r_1$  ökar ytterligare kommer rörelsen på den tidigare långsamma mångfalden igång igen, men nu sker rörelsen bort ifrån origo. Fasporträttet klassas nu som sadelpunkt. Detta betyder att den stabila nodens långsamma mångfald har övergått i sadelpunktens instabila mångfald. Samtidigt har den stabila nodens snabba mångfald övergått i sadelpunktens stabila mångfald.

Det finns fyra typer av degenererade fasporträtt. Om ett av egenvärdena,  $r$ , är skilt från noll så finns det två möjligheter, nämligen  $r < 0$  (då origo är neutralt stabil) och  $r > 0$  (då origo är instabil). Om bägge egenvärdena är noll så finns det ytterligare två typer av fasporträtt. En av dem uppstår när egenvärdet noll är defekt och en annan när egenvärdet noll inte är defekt. Den sista nämnda typen innebär att alla elementen i matrisen  $\mathbf{A}$  är lika med noll. Varje punkt i  $x-y$ -planet

är då en kritisk punkt, och varje bana är en punkt. Fasporträttet är instabilt om egenvärdet är defekt och neutralt stabilt i det andra fallet.

Av någon orsak behandlas de enkla degenererade fasporträten inte alls av Boyce och diPrima.

En sammanställning av alla fasporträttstyper finns i Tabell 1. Notera att det finns 9 typer av fasporträtt bland de tre huvudtyper som uppträder när origo är hyperbolisk och ytterligare 5 typer bland de två huvudtyper som är möjliga när origo är ickehyperbolisk. De nio möjliga fasporträttstyperna när origo är hyperbolisk spelar en viktig roll i linjariseringssatsen nedan.

När man studerar ett ekvationssystem som innehåller parametrar så är det av intresse att bestämma de områden i parameterrummet som ger upphov till olika typer av fasporträtt. Parameterrummet bör då förenklas så långt som möjligt. Sådana förenklingar kan ofta göras med dimensionsanalys och skalning. Det linjära ekvationssystemet (2.1) innehåller fyra parametrar, nämligen de fyra elementen i matrisen  $\mathbf{A}$ . Det motsvarande fyrdimensionella parameterrummet kan förenklas väsentligt. Det räcker med ett tvådimensionellt parameter- rum för att beskriva nästan alla fasporträten. De två parametrarna ifråga är spåret  $\mathbf{sp}$  och determinanten  $\mathbf{det}$  för matrisen  $\mathbf{A}$ . De enda undantagen uppstår för gränfallsnoderna, där ytterligare information behövs för att bestämma om egenvärdet är defekt eller inte, d.v.s. för att skilja mellan stjärnformade och oegentliga noder. Figur 3 visar de olika typerna av fasporträtt i detta tvådimensionella parameterrum. I stort sett samma information återfinnes i Figur 9.1.9 i kursboken.

	Antal typer som är		
	Stabila	Instabila	Neutralt stabila
Origo hyperbolisk:			
I. Sadel		1	
II. Spiral	1	1	
III A. Egentlig nod	1	1	
III B. Gränfallsnod	2	2	
Origo ickehyperbolisk:			
IV. Center			1
V. Degenererade fall		2	2

TABELL 1. Lista över fasporträttstyper.

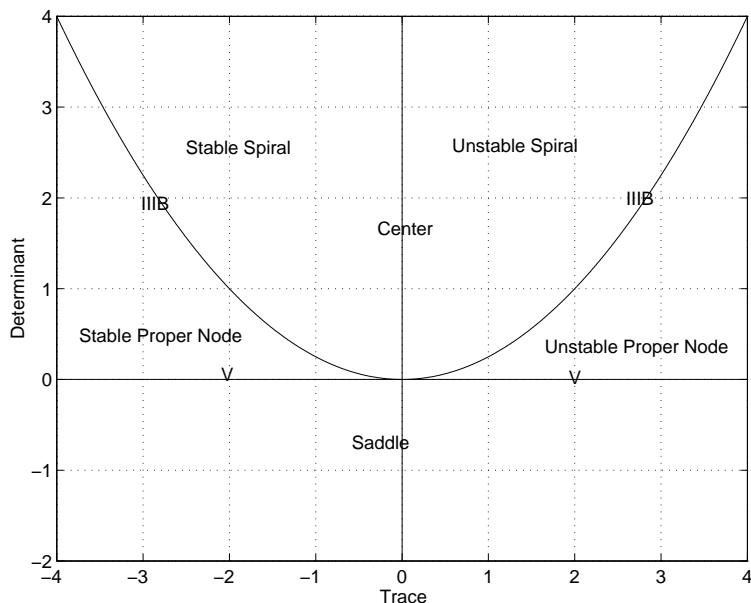
Bägge figurerna innehåller den parabel där  $\mathbf{det} = \mathbf{sp}^2/4$ . Ovanför parabeln är egenvärdena komplex-konjugata, på parabeln är de reella

och lika, och under parabeln är de reella och distinkta. Båda egenvärdena ligger i högra halvplanet, d.v.s. de har positiva realdelar, när vi befinner oss i den öppna första kvadranten av spår-determinant-planet (där både spåret och determinanten är positiva). Om vi flyttar oss till den öppna andra kvadranten i spår-determinant-planet (där spåret är negativt och determinanten positiv) kommer båda egenvärdena att flyttas till vänstra halvplanet, där deras realdelar är negativa. Om vi lägger oss under spår-axeln så blir determinanten negativ. Detta medför att egenvärdena är reella, och att ett av dem är positivt och ett negativt.

Den egentliga noden är associerad med den öppna delmängd av spår-determinant-planet som ligger ovanför spåraxeln och under parabeln. Fasporträttet är en sadelpunkt för alla punkter som ligger under spåraxeln. Spiralen associeras med de punkter som ligger ovanför parabeln, med undantag av punkterna på determinantaxeln. Fasporträttet är en gränsfallsnod för alla punkter på parabeln i spår-determinant-planet utom origo. Noder, spiraler och gränsfallsnoder är alla asymptotiskt stabila i den andra kvadranten och instabila i den första. Centret motsvaras av punkterna på den positiva determinantaxeln. De degenererade fasporträtten, slutligen, associeras med punkterna på den horisontella spåraxeln.

Vid jämförelsen av två olika typer av fasporträtt använder vi begreppet **kvalitativ ekvivalens**. Två fasporträtt sägs vara kvalitativt ekvivalenta om det finns en kontinuerlig och inverterbar avbildning av fasplanet på sig självt som avbildar banorna i det ena fasplanet på banorna i det andra. Det visar sig att i det tvådimensionella linjära fallet finns det bara tre kvalitativt olika fasporträtt med origo hyperbolisk. De tre fallen motsvaras av att antalet egenvärden hos matrisen  $\mathbf{A}$  som ligger i vänstra halvplanet (har negativa realdelar) är noll eller ett eller två. Om vi överflyttar villkoren för dessa tre fall till spår-determinant-planet ser vi att de motsvaras av 1) den öppna första kvadranten, 2) hela området under spåraxeln, och 3) den öppna andra kvadranten. Detta betyder att den stabila egentliga noden, den stabila spiralen, och de två stabila gränsfallsnoderna alla är kvalitativt ekvivalenta. På samma sätt är den instabila egentliga noden, den instabila spiralen, och de två instabila gränsfallsnoderna kvalitativt ekvivalenta. Å andra sidan är t.ex. den stabila egentliga noden, sadelpunkten och den instabila spiralen alla kvalitativt olika.

Begränsningslinjerna i spår-determinant-planet mellan de tre kvalitativt olika typerna av fasporträtt ligger dels på den horisontella



FIGUR 3. De olika typerna av fasporträtt är associerade med olika undermängder av spår–determinant–planet.

spåraxeln och dels på den positiva delen av determinantaxeln. Vi observerar att dessa begränsningslinjer sammanfaller med mängden av värden i spår–determinant–planet där origo är en ickehyperbolisk kritisk punkt.

Begreppet **klyсна** är förknippat med ett linjärt eller icke linjärt ekvationssystem som innehåller en eller flera parametrar. Klyсна uppstår när en liten parameterförändring kan leda till en kvalitativ förändring av fasporträttet. Ett sätt på vilket en sådan kvalitativ förändring kan uppstå är att antalet kritiska punkter (med reella koordinater) ändras som resultat av parameterförändringen. Ett annat sätt (som inte nödvändigtvis utesluts av det första) är att den kvalitativa typen hos en existerande kritisk punkt förändras. Från vår analys av spår–determinant–planet ser vi att klyсна för det linjära ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{A}\mathbf{u}$  uppstår exakt för de parametervärden där origo är en ickehyperbolisk kritisk punkt.

### 3. FASPORTRÄTT FÖR ICKELINJÄRA SYSTEM

Fasporträtten hos icke linjära system har många beteenden som inte återfinns hos något fasporträtt för ett linjärt system. De senare är ändå av stor betydelse i detta avsnitt. Vi skall använda oss av dem för att bestämma de lokala fasporträtten för de icke linjära systemen i

närheten av de kritiska punkterna. Detta sker genom att vi linjariserar de icke-linjära systemen kring var och en av de kritiska punkterna. Metoden för bestämning av typen av fasporträtt kring den kritiska punkten i det icke-linjära systemet är sedan mycket enkel: Typen av fasporträtt är densamma som för det linjariserade systemet **utom i vissa undantagsfall**. Undantagsfallen är å andra sidan mycket viktiga, eftersom de kan ange förekomsten av en **klysna**. Detta senare gäller endast om ekvationssystemet innehåller en eller flera parametrar och någon av de kritiska punkterna kan bli ickehyperbolisk som resultat av parameterförändringar.

**3.1. Linjarisering kring en kritisk punkt.** Linjariseringen av ett icke-linjärt system (1.1) kring en kritisk punkt  $u^0$  är både formellt och reellt snarlik den linjarisering som man kan göra om differentialekvationen är skalär. Vi börjar därför med att studera den skalära ekvationen  $u' = f(u)$ . Vi bestämmer först den kritiska punkten  $u^0$  genom att lösa ekvationen  $f(u) = 0$ . Sedan linjariserar vi det icke-linjära högerledet  $f(u)$  kring den kritiska punkten  $u^0$  genom att bilda det linjära uttrycket  $l(u) = f(u^0) + f'(u^0)(u - u^0)$ . Eftersom vi har valt att göra utvecklingen kring en kritisk punkt är den första termen här lika med noll och det linjära uttrycket förenklas till  $l(u) = f'(u^0)(u - u^0)$ .

Under lämpliga villkor (som kommenteras i nästa stycke) kommer det linjära uttrycket  $l(u)$  att vara en approximation till  $f(u)$  i någon omgivning av den kritiska punkten  $u^0$ . Vi studerar den resulterande approximationen av differentialekvationen i samma omgivning av  $u^0$ . För att göra detta inför vi den nya variabeln  $v$  genom att sätta  $v = u - u^0$ . Det följer att  $v$  satisfierar den linjära differentialekvationen  $v' = av$ , där konstanten  $a$  är lika med derivatan av  $f$  med avseende på  $u$  i punkten  $u^0$ , d.v.s.  $a = f'(u^0)$ .

Vi frågar oss under vilka villkor som  $l(u)$  kan anses vara en approximation till  $f(u)$  i en omgivning av punkten  $u^0$ . Villkoren ligger i regulariteten hos funktionen  $f$ . Det är nödvändigt att anta att  $f$  är deriverbar för att överhuvudtaget kunna bilda det linjära uttrycket  $l(u)$ . Med användande av medelvärdessatsen får vi  $f(u) = f'(u^0 + \theta(u - u^0))(u - u^0)$ , där  $0 < \theta < 1$ . Skillnaden mellan  $f(u)$  och  $l(u)$  kan alltså skrivas  $f(u) - l(u) = [f'(u^0 + \theta(u - u^0)) - f'(u^0)](u - u^0)$ . Om derivatan  $f'$  är kontinuerlig, d.v.s. om  $f \in C^1$ , kommer den första faktorn här att gå mot noll när  $u \rightarrow u^0$ . Detta betyder att skillnaden  $f(u) - l(u)$  går mot noll snabbare än  $u - u^0$  när  $u \rightarrow u^0$ . Detta är ett minimikrav för att de utelämnade termerna vid linjariseringen inte skall ha för stort inflytande jämfört med den linjära termen. En förbättring av approximationen uppnås om  $f \in C^2$ .

Om nu  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  är ett givet system av differentialekvationer som har en kritisk punkt i  $\mathbf{u}^0$  så förfar vi på analogt sätt för att linjarisera systemet kring den kritiska punkten. I detta fall är både  $\mathbf{f}$  och  $\mathbf{u}$  vektorer. Motsvarigheten till den derivata av en skalär funktion med avseende på en skalär variabel som vi behövde för linjariseringen ovan är att vi nu må bilda derivatan av en vektorvärd funktion med avseende på en vektorvärd variabel. Denna derivata ges av en matris som kallas den jakobianska matrisen. Om vektorn  $\mathbf{u}$  har komponenterna  $x$  och  $y$  och om komponenterna för  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  benämns  $F(x, y)$  och  $G(x, y)$  så kan den jakobianska matrisen skrivas på följande sätt:

$$\mathbf{J}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} \\ \frac{\partial G(x,y)}{\partial x} & \frac{\partial G(x,y)}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Högerledet  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  av vårt ekvationssystem approximeras alltså med ett linjärt uttryck,  $\mathbf{f}(\mathbf{u}) \approx \mathbf{J}(\mathbf{u}^0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)$ , i någon tillräckligt liten omgivning av den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$ . Eftersom vi har infört antagandet att  $\mathbf{f} \in C^2$  vet vi att approximationen är bättre än den som kan åstadkommas med antagandet  $f \in C^1$  som används av Boyce och diPrima.

Linjariseringen av det givna ickelinjära systemet av differentialekvationer  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  kring den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$  leder till det linjära ekvationssystemet  $\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v}$ , där  $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}^0$  och där matrisen  $\mathbf{A}$  är den jakobianska matrisen evaluerad i den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$ . Vi använder följande alternativa beteckningar för matrisen  $\mathbf{A}$ :  $\mathbf{A} = \mathbf{J}(\mathbf{u}^0) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}^0)$ .

I den omedelbara närheten av den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$  kan vi förvänta oss att fasporträttet för det ickelinjära ekvationssystemet är snarlikt fasporträttet för linjariseringen. Villkoren för att de två fasporträtten skall vara av samma typ ges av linjariseringssatsen i nästa avsnitt.

**3.2. När bestäms fasporträttet av linjariseringen?** För att förstå villkoren för att det ickelinjära systemet skall ha samma typ av fasporträtt kring en kritisk punkt som det som ges av linjariseringen studerar vi först det skalära fallet. Här noterar vi att om  $f(u^0) = 0$  och  $f'(u^0) > 0$  så är  $f(u)$  positiv i ett intervall till höger om  $u^0$  och negativ i ett intervall till vänster om  $u^0$ . Genom att använda differentialekvationen  $u' = f(u)$  ser vi att  $u'(t)$  är positiv i ett intervall till höger om  $u^0$  och negativ i ett intervall till vänster. I detta fall kommer en liten förändring av initialvärdena från den kritiska punkten  $u^0$  att medföra att  $u(t)$  avlägsnar sig från punkten  $u^0$ . Detta innebär att  $u^0$  är instabil. Om å andra sidan  $f'(u^0) < 0$  i den kritiska punkten  $u^0$  så är  $u(t)$  avtagande i ett intervall till höger om  $u^0$  och tilltagande i ett intervall

till vänster om  $u^0$ . I detta fall är  $u^0$  asymptotiskt stabil. Den tredje möjligheten är att  $f'(u^0) = 0$ . I detta fall är det inte möjligt att dra någon slutsats om beteendet av lösningen  $u(t)$  i närheten av  $u^0$  utan ytterligare undersökning. Notera t.ex. att  $u^0 = 0$  är asymptotiskt stabil för ekvationen  $u' = f(u)$  om  $f(u) = -u^3$  men instabil om  $f(u) = u^3$ . I båda dessa fall är  $f(0) = f'(0) = 0$ . (Om vi skriver  $u(0) = u_0$  så är lösningen till den första av dessa differentialekvationer  $u(t) = u_0/\sqrt{1 + tu_0^2}$  och till den andra  $u(t) = u_0/\sqrt{1 - tu_0^2}$ . Existensintervallet för den första är  $t > -1/u_0^2$  och för den andra  $t < 1/u_0^2$ . Dessa två lösningar beter sig helt olika när  $t$  växer. Den första går mot noll när  $t \rightarrow \infty$ , medan beloppet av den andra växer mot  $\infty$  när  $t$  närmar sig existensintervallets högra ändpunkt  $1/u_0^2$ .)

I det skalära fallet drar vi slutsatsen att linjarisering kring en kritisk punkt  $u^0$  ger information om lösningens beteende när  $f'(u^0)$  är skild från noll.

Ett likartat resultat gäller i vektorfallet. Derivatans  $f'(u)$  i skalärfallet motsvaras av den jakobianska matrisen  $\mathbf{f}'(\mathbf{u})$  i vektorfallet. Det viktiga villkoret att derivatan  $f'(u^0)$  är skild från noll motsvaras i vektorfallet av villkoret att inget egenvärde hos den jakobianska matrisen  $\mathbf{f}'(\mathbf{u}^0)$  ligger på den imaginära axeln. I analogi med det linjära fallet kallar vi den kritiska punkten hyperbolisk i detta fall. Följande definition införs.

**Definition:** Den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$  till differentialekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  kallas **hyperbolisk** om inget egenvärde till den jakobianska matrisen  $\mathbf{f}'(\mathbf{u}^0)$  ligger på den imaginära axeln.

Med hjälp av denna definition kan vi nu formulera en sats som ersätter Sats 9.3.2 i Boyce och diPrima. Satsen innehåller huvudresultatet för bestämning av det lokala fasporträttet i en omgivning av en kritisk punkt.

**Linjariseringssatsen:** Antag att  $\mathbf{u}^0$  är en hyperbolisk kritisk punkt för ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  och att  $\mathbf{f} \in C^2$ . Då är det lokala fasporträttet kring  $\mathbf{u}^0$  av samma typ som fasporträttet för det linjära systemet  $\mathbf{v}' = \mathbf{J}(\mathbf{u}^0)\mathbf{v}$ .

De 9 typerna av fasporträtt som är möjliga när origo är hyperbolisk (se Tabell 1) kan alltså bestämmas med linjarisering. Vi noterar att ingen slutsats kan dras från denna sats om fasporträttstypen när  $\mathbf{u}^0$  är ickehyperbolisk. Detta betyder att om man eftersträvar information om typen av fasporträtt när  $\mathbf{u}^0$  är ickehyperbolisk så kan man inte använda sig av linjariseringen. Termer av högre ordning är nödvändiga, och de matematiska svårigheterna växer. På grund av detta är det bra att veta att om man studerar ett problem i tillämpad matematik är det

ofta onödigt att bestämma typen av fasporträtt för ickehyperboliska kritiska punkter.

Vi jämför lärobokens Sats 9.3.2 och vår Linjariseringssats med avseende på förutsättningar och slutsatser. Vår sats både kräver mer och ger mer. Det viktigaste kravet i lärobokssatsen är att  $\mathbf{f} \in C^1$ , medan vi ställer det starkare kravet att  $\mathbf{f} \in C^2$ . Å andra sidan kan lärobokssatsen inte dra några definitiva slutsatser om typen av fasporträtt när jakobianska matrisen har en dubbelrot, medan Linjariseringssatsen ger definitiva besked om typen av fasporträtt för alla hyperboliska kritiska punkter.

Den större generaliteten hos lärobokssatsen är av begränsat praktiskt värde. Satsens styrka kommer fram endast om man vill studera vissa patologiska fall. Det förtjänar att påpekas att alla problem i Avsnitt 9.3 i kursboken handlar om system av differentialekvationer där högerleden har kontinuerliga derivator av alla ordningar, d.v.s. där  $\mathbf{f}$  ligger i  $C^\infty$ . Det finns alltså inte där något fall där lärobokssatsens större generalitet kan nyttjas. Däremot finns det flera fall där lärobokssatsen inte kan bestämma typen av fasporträtt i en omgivning av en kritisk punkt, medan den enklare  $C^2$ -satsen kan det. Ett konkret exempel behandlas nedan.

Det globala fasporträttet för ett ickelinjärt ekvationssystem byggs upp från de lokala med hjälp av numeriska program (t.ex. Maple) som beräknar och plottar ett antal banor. När man ger kommandon till programmet om initialvärden bör man i första hand se till att man får med de banor som har namngivits ovan, d.v.s. de som svarar mot de snabba och långsamma mångfalder som associeras med noder och mot de stabila och instabila mångfalder som hör till sadelpunkter. Dessa ger viktig kvalitativ information om fasporträttet. I många tillämpningsproblem kan dessa ges meningsfull tolkning. Instruktioner om hur man använder Maple för att rita fasporträtt för både linjära och ickelinjära system ges i de datorlaborationer som ingår i kursen.

**3.3. Nästan linjära system.** Begreppet “nästan linjärt system” används inte i denna kurs, och det bör överhuvudtaget inte användas. Som stöd för detta uttalande ger vi några kritiska synpunkter. Vi använder samma beteckningar som ovan. Ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  har en kritisk punkt  $\mathbf{u}^0$ . Den jakobianska matrisen i den kritiska punkten betecknas  $\mathbf{J}(\mathbf{u}^0) = \mathbf{f}'(\mathbf{u}^0)$ , och vi skriver  $\mathbf{g}(\mathbf{u})$  för att beteckna skillnaden mellan det givna högerledet och linjariseringen kring  $\mathbf{u}^0$ . Vi har alltså  $\mathbf{g}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}(\mathbf{u}) - \mathbf{J}(\mathbf{u}^0)(\mathbf{u} - \mathbf{u}^0)$ . Enligt definitionen i Boyce och diPrima säges ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$  vara nästan linjärt i en omgivning av den kritiska punkten om följande fyra villkor är uppfyllda:

- 1)  $\mathbf{f} \in C^1$ ,
- 2) Determinanten för  $\mathbf{J}(\mathbf{u}^0)$  är inte lika med noll,
- 3) Den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$  är isolerad,
- 4)  $\|\mathbf{g}(\mathbf{u})\|/\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^0\| \rightarrow 0$  när  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{u}^0$ .

Dessa fyra villkor är inte oberoende. I avsnitt 3.1 har vi redan visat (i det skalära fallet) att beloppet för skillnaden  $g(u)$  mellan det olinjära uttrycket  $f(u)$  och linjariseringen kring den kritiska punkten går mot noll fortare än beloppet för  $u - u_0$  när  $u$  går mot  $u_0$ , om  $f$  har kontinuerlig derivata. Samma argument kan användas för att visa motsvarande resultat i vektorfallet. Detta medför att villkor 4) följer från villkor 1).

Vidare gäller att villkor 3) följer från villkor 2). För att visa detta antar vi att den kritiska punkten  $\mathbf{u}^0$  inte är isolerad. Då finns det ett intervall av  $x$ -värden (eller  $y$ -värden) där de två nollisoklinerna som definieras av att  $x' = 0$  och av att  $y' = 0$  sammanfaller. Om den gemensamma nollisoklinen benämnes  $y(x)$  har vi alltså både  $F(x, y(x)) = 0$  och  $G(x, y(x)) = 0$  längs denna isoklin. Härav följer att

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} y'(x) &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} y'(x) &= 0.\end{aligned}$$

Detta betyder att determinanten för den jakobianska matrisen i den kritiska punkten blir lika med noll.

Genom att ta hänsyn till dessa två relationer mellan de fyra villkor som definierar ett nästan linjärt system ser vi att definitionen lika väl kan baseras på de två första av de fyra villkoren.

Det är anmärkningsvärt att endast den ena av de två huvudtyperna av ickehyperboliska kritiska punkter, centret och det degenererade fallet, uteslutes vid definitionen av ett nästan linjärt system. Den typ som uteslutes är det degenererade fallet, där ju minst ett av egenvärdena är lika med noll. Denna typ uteslutes av villkoret 2) att determinanten för  $\mathbf{J}(\mathbf{u}^0)$  (som är lika med produkten av egenvärdena) är skild från noll.

Lärobokens Sats 9.3.2 kan omformuleras på följande sätt:

**Sats:** Antag att  $\mathbf{u}^0$  är en hyperbolisk kritisk punkt för ekvationssystemet  $\mathbf{u}' = \mathbf{f}(\mathbf{u})$ , där  $\mathbf{f} \in C^1$ . Om den karakteristiska ekvationen till matrisen  $\mathbf{J}(\mathbf{u}^0)$  inte har någon dubbelrot så är det lokala fasporträttet kring  $\mathbf{u}^0$  av samma typ som fasporträttet för det linjära systemet  $\mathbf{v}' = \mathbf{J}(\mathbf{u}^0)\mathbf{v}$ . Om däremot den karakteristiska ekvationen till matrisen  $\mathbf{J}(\mathbf{u}^0)$  har en dubbelrot så kan typen av fasporträtt inte bestämmas genom linjarisering.

En jämförelse med linjariseringssatsen i 3.2 visar att det något otillfredsställande resultatet i fallet med dubbelrot uppstår endast i det mycket speciella fallet när  $\mathbf{f}$  ligger i  $C^1 - C^2$ , d.v.s. när högerledet i det givna ekvationssystemet har första derivatan kontinuerlig, medan samtidigt den andra derivatan inte är kontinuerlig. Detta fall kan med fog kallas patologiskt. Som exempel noterar vi att högerleden är polynom i  $x$  och  $y$  för alla problem i kursboken. Det betyder att de har kontinuerliga derivator av alla ordningar.

#### 4. EXEMPEL OCH TILLÄMPNINGAR

**4.1. Ett exempel med en oegentlig nod.** Vi illustrerar våra resultat genom att lösa problem nummer 12 i Avsnittet 9.3 i kursboken av Boyce och diPrima. Uppgiften är att bestämma de kritiska punkterna och typen av fasporträtt i omgivningen av var och en av dem för följande system av differentialekvationer:

$$\begin{aligned}x' &= 1 - xy, \\y' &= x - y^3.\end{aligned}$$

Högerleden i ekvationssystemet är polynom i  $x$  och  $y$ , vilket ger underlag för vårt påstående ovan att högerledet har kontinuerliga derivator av varje ordning ( $\mathbf{f} \in C^\infty$ ).

Vi börjar med att bestämma de kritiska punkterna. Deras koordinater bestäms från de ekvationer som erhålls genom att sätta de två högerleden lika med noll. Vi får  $1 - xy = 0$  och  $x - y^3 = 0$ . Härur ser vi att  $x = y^3$  och att  $y^4 = 1$ . Den senare av dessa två ekvationer har två reella rötter, nämligen  $y = \pm 1$ . Det finns alltså två kritiska punkter. Vi kallar dem för  $\mathbf{P}_1$  och  $\mathbf{P}_2$ . Deras koordinater är  $\mathbf{P}_1 = (1, 1)$  och  $\mathbf{P}_2 = (-1, -1)$ .

Vi beräknar nu den jakobianska matrisen till det givna ekvationssystemet:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -y & -x \\ 1 & -3y^2 \end{pmatrix}.$$

Nästa steg är att bestämma de två konstanta matriser som vi får genom att evaluera den jakobianska matrisen i var och en av de kritiska punkterna:

$$\mathbf{J}(\mathbf{P}_1) = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{J}(\mathbf{P}_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

För att bestämma de lokala fasporträtten kring var och en av de kritiska punkterna använder vi oss av Linjariseringssatsen i Avsnitt

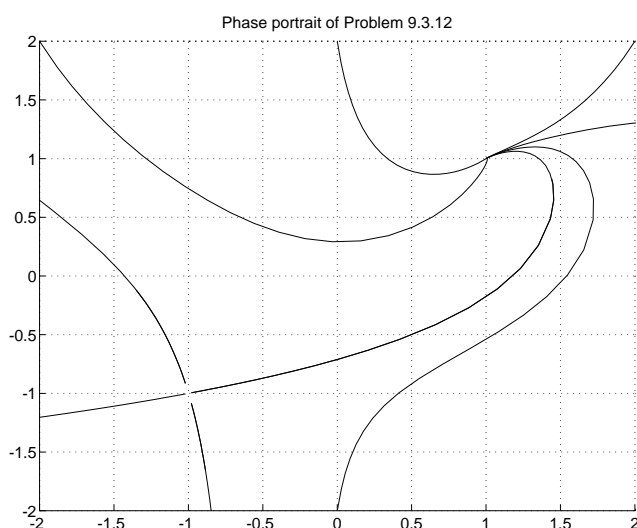
3.2 och av den klassificering av fasporträtt för det linjära ekvations-systemet som görs med hjälp av spåret och determinanten och som sammanfattas i Figur 3.

Matrisen  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_1)$  har spåret  $= -4$  och determinanten  $= 4$ . En första slutsats är att den kritiska punkten  $\mathbf{P}_1$  är hyperbolisk så att linjariseringsatsen kan tillämpas. Vi inser lätt att determinanten  $=$  spåret i kvadrat dividerat med 4. Vi hamnar alltså på den parabel i spår-determinant-planet som anger att den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot. Jakobianska matrisen  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_1)$  har egenvärdet  $-2$ . Eftersom matrisen inte är en konstant gånger enhetsmatrisen så är egenvärdet defekt. Vi kan härav dra slutsatsen att det lokala fasporträttet i en omgivning av den kritiska punkten  $\mathbf{P}_1$  är en asymptotiskt stabil oegentlig nod.

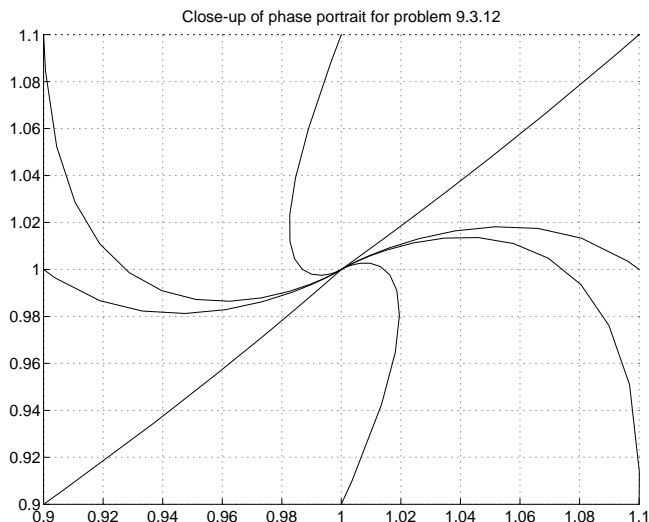
Matrisen  $\mathbf{J}(\mathbf{P}_2)$  har spåret  $= -2$  och determinanten  $= -4$ . Den kritiska punkten  $\mathbf{P}_2$  är alltså hyperbolisk och linjariseringsatsen kan tillämpas. Det följer att det lokala fasporträttet kring  $\mathbf{P}_2$  är en sadelpunkt.

En jämförelse med facit i kursboken visar att Boyce och diPrima inte har kunnat bestämma typen av fasporträtt runt  $\mathbf{P}_1$ . Orsaken är att läroboksförfattarna använder sig av sin Sats 9.3.2, och att denna sats inte tillåter några slutsatser om typen av fasporträtt om man hamnar på parabeln i spår-determinant-planet.

Fasporträttet för detta problem visas i Figurerna 4 och 5. Närbilden i Figur 5 är konsistent med vår slutsats att fasporträttet i en omgivning av den kritiska punkten  $\mathbf{P}_1$  är en asymptotiskt stabil oegentlig nod.



FIGUR 4. Fasporträttet för problem 9.3.12 i Boyce och diPrima.



FIGUR 5. Närbild av fasporträttet för problem 9.3.12 i Boyce och diPrima.

**4.2. Ett skalärt problem med klypsna.** Vi behandlar en modell i matematisk epidemiologi som kallas SIS-modellen. Bokstäverna SIS beskriver de successiva tillstånden för en enskild individ. S står för susceptible = mottaglig, och I står för infected = infekterad. När en infekterad individ tillfrisknar går han tillbaka till det mottagliga stadiet. Detta betyder att infektionen inte ger någon immunitet. En tillfrisknad individ är lika mottaglig för smitta som en som aldrig varit infekterad. Viktiga exempel på infektioner som ger låg och kanske försumbar immunitet ges av malaria och gonorrhé. Barnsjukdomar som mässling ger däremot en långvarig immunitet. Modeller för malaria och gonorrhé kallas bivariata SIS-modeller, eftersom vi där måste studera infektionen i två populationer (människor och myggor för malaria, män och kvinnor för gonorrhé). Vi studerar här en SIS-modell för en population.

Som alltid vid modellbygge utgår vi från en förenkling av verkligheten. Vi antar att populationsstorleken är konstant och vi betecknar antalet individer med  $N$ . Vi betecknar antalet mottagliga individer vid tidpunkten  $t$  med  $S(t)$  och antalet infekterade individer med  $I(t)$ . Vi har därför sambandet  $S(t) + I(t) = N$ . Vidare antar vi att varje individ har kontakt med  $\beta$  andra individer per tidsenhet. (De kontakter som räknas är sådana som medför att smitta överförs från infekterad till ickeinfekterad individ om kontakten äger rum mellan en I-individ och en S-individ.) Vid tidpunkten  $t$  är proportionen  $I(t)/N$

av populationen infekterad. Antalet kontakter för varje mottaglig individ per tidsenhet som leder till att individen blir infekterad är därför  $\beta I(t)/N$ . Totala antalet nya infektioner i hela populationen per tidsenhet är  $\beta I(t)S(t)/N$ . Vidare antar vi en konstant tillfriskningsintensitet  $\gamma$ . Våra hypoteser leder till följande differentialekvation för  $I(t)$ :

$$(4.1) \quad I' = \frac{\beta}{N}SI - \gamma I = \frac{\beta}{N}(N - I)I - \gamma I.$$

Ekvationen innehåller tre parametrar:  $N$ ,  $\beta$  och  $\gamma$ . Vi skalar tillståndsstorheten  $I$  genom att införa  $x = I/N$  som beteckning för prevalensen, d.v.s. den andel av populationen som är infekterad. Differentialekvationen för  $x(t)$  kan skrivas:

$$(4.2) \quad x' = \beta(1 - x)x - \gamma x = \gamma[T(1 - x)x - x] = f(x).$$

Här har vi infört transmissionsfaktorn  $T$  genom att sätta  $T = \beta/\gamma$ . Ekvationen innehåller två parametrar,  $T$  och  $\gamma$ , men dessa påverkar lösningens beteende på helt olika sätt. De kritiska punkterna (stationära lösningarna) bestäms av transmissionsfaktorn  $T$ , medan tillfriskningsintensiteten  $\gamma$  enbart påverkar derivatan  $x'(t)$ , d.v.s. hastigheten av förändringarna i prevalensen. Man kan eliminera  $\gamma$  helt och hållet genom att skala om tiden, men vi avstår eftersom vårt intresse koncentreras till de kritiska punkterna.

Det är värt att notera att diffekvationen för  $x$  ovan kan lösas explicit. Vi går en annan väg och ger en kvalitativ analys av ekvationen. Avsikten med detta avsnitt är att visa hur enkla de kvalitativa idéerna ter sig i det skalära fallet.

Vi bestämmer först de kritiska punkterna genom att lösa ekvationen  $f(x) = 0$ . Vi ser att det finns två kritiska punkter:  $x_1 = 0$  och  $x_2 = 1 - 1/T$ . Den första av dessa punkter motsvarar prevalensen 0 (infektionen har försvunnit från populationen), medan den andra ger en positiv prevalens om  $T > 1$ . För epidemiologiska tolkningar är det naturligt att begränsa sig till värden på prevalensen som ligger i det slutna intervallet från noll till ett. För fortsättningen studerar vi dock ekvationen  $x' = f(x)$  matematiskt utan denna begränsning.

Nästa steg i analysen är att linjarisera ekvationen kring var och en av de kritiska punkterna. Linjariseringen ger en linjär differentialekvation  $v' = av$ , där  $v = x - x^0$ ,  $a = f'(x^0)$ , och  $x^0$  betecknar en av de kritiska punkterna. Vi beräknar derivatan  $f'(x)$ :

$$(4.3) \quad f'(x) = \gamma(T - 2Tx - 1).$$

Notera att primtecknet här betecknar derivatan med avseende på  $x$ , medan primtecknet i  $x'$  betecknar derivatan m.a.p.  $t$ . Derivatan evaluerad i var och en av de två kritiska punkterna blir alltså

$$(4.4) \quad f'(x_1) = \gamma(T - 1), \quad f'(x_2) = \gamma(1 - T).$$

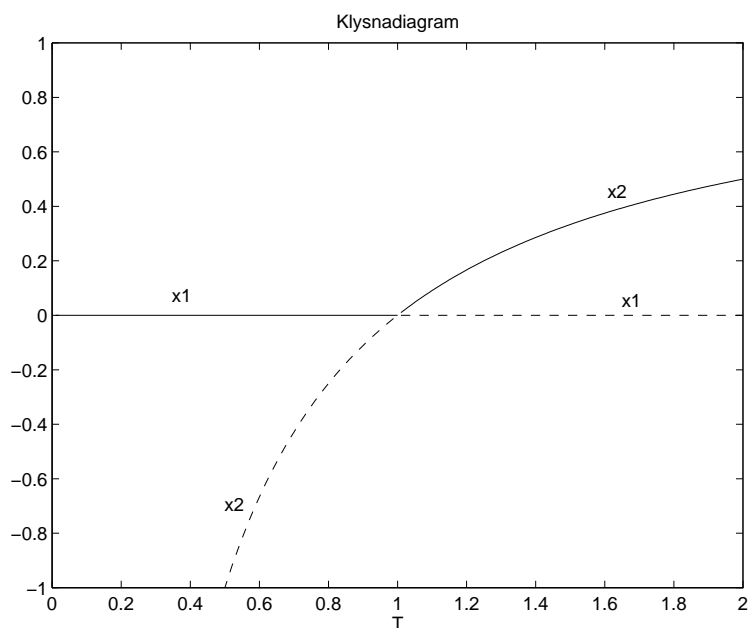
Det är av intresse att studera fasporträtt, hyperbolicitet och linjariserings-sats för det skalära fallet. Fasporträtten är i detta fall endimensionella. En kritisk punkt  $x_0$  till den skalära ekvationen  $x' = f(x)$  är hyperbolisk om derivatan  $f'(x_0)$  är skild från noll. Den linjära ekvationen  $x' = ax$  har två typer av fasporträtt när origo är hyperbolisk. När  $a < 0$  är origo stabil och fasporträttet innehåller två banor som bägge närmar sig origo när tiden växer. När  $a > 0$  är origo instabil och de två banorna avlägsnar sig från origo när tiden växer. Linjariserings-satsen utsäger i det skalära fallet att fasporträttet i en omgivning av den kritiska punkten  $x_0$  för den olinjära ekvationen  $x' = f(x)$  är av samma typ som fasporträttet för linjariseringen om  $x_0$  är hyperbolisk. Om en ickehyperbolisk kritisk punkt uppkommer som resultat av parameterförändringar så innebär det att klyсна förekommer.

Vi återgår till att studera SIS-modellen. För att kunna dra slutsatser om stabiliteten (och typen av fasporträtt) hos var och en av de två kritiska punkterna räcker det att bestämma tecknet av derivatan av  $f$  i var och en av de kritiska punkterna. Vi ser av uttrycken ovan att bägge de kritiska punkterna är hyperboliska när  $T \neq 1$ , och att klyсна uppträder för  $T = 1$ . Epidemiologiskt tolkar vi klyснаmängden  $T = 1$  som en tröskel, och vi beskriver  $T$ -värden mindre än värdet 1 som liggande under tröskeln och  $T$ -värden större än 1 som liggande ovanför tröskeln. Mera i detalj leds vi till slutsatsen att den kritiska punkten  $x_1 = 0$  är asymptotiskt stabil om  $T < 1$  och instabil om  $T > 1$ . Detta betyder att origo är stabil under tröskeln och instabil ovanför tröskeln. Dessutom ser vi att den kritiska punkten  $x_2 = 1 - 1/T$  har omvända stabilitetsförhållanden. Detta betyder att den kritiska punkt som svarar mot en endemisk infektionsnivå är stabil ovanför tröskeln.

En epidemiologisk tolkning av våra resultat är att infektionen dör ut om  $T < 1$ , och att den etableras på en nivå med positiv prevalens om  $T > 1$ .

Resultatet av analysen kan sammanfattas genom att ange *klyснаmängden* och rita ett *klysnadiagram*. Dessa begrepp används i fortsättningen när vi diskuterar klysnafenomen för icke-linjära system av differentialekvationer. Klyснаmängden är en undermängd av parameter-rummet där klyсна uppträder. Den ges, som vi redan kommenterat ovan, av  $T = 1$ . Klysnadiagram används för att visa de kritiska punkterna och deras stabilitet som funktion av  $T$ . Notera att en parameter

( $T$ ) visas på den horisontella axeln, medan den vertikala axeln visar en tillståndsvariabel. Klysnadiagrammet i figur 6 visar att de två kritiska punkterna sammanfaller när  $T = 1$  och att ett utbyte av stabilitet mellan dem sker när parametern  $T$  passerar värdet 1.



FIGUR 6. Klysnadiagrammet för SIS-modellen. Koordinater för de kritiska punkterna  $x_1$  och  $x_2$  visas som funktion av parametern  $T$ .

Stabilitet indikeras med heldragen kurva, och instabilitet med streckad. Stabilitetsutbyte mellan de två kritiska punkterna när  $T$  passerar värdet 1.

**4.3. Ross' Malariamodell.** Detta avsnitt behandlar en klassisk modell för utbredningen av malaria i ett samhälle. I det första delavsnittet ges en kort beskrivning av den biologiska bakgrunden. Strängt taget behövs inte denna information för att kunna formulera och förstå den matematiska modellen, men det kan ändå vara intressant att få en inblick i de fascinerande livsformer som malarian är ett exempel på. Formuleringen av modellen ges i delavsnitt 2 och analysen beskrivs i delavsnitt 3.

**4.3.1. Malaria.** Malaria är en infektionssjukdom som orsakas av en parasit med komplicerad livscykel. Parasiten uppträder i helt olika former i livscykeln olika faser. Både människor och myggor behövs

för att parasitens livscykel skall slutas så att parasiten skall kunna fortleva som art.

Sjukdomen hos människor orsakas av en parasitform (merozoit) som invaderar de röda blodcellerna. I dem mångfaldigas parasiterna genom asexuell reproduktion. Detta leder till att de invaderade blodcellerna periodvis sprängs sönder varvid de nybildade parasiterna släpps ut i blodet. Detta orsakar de typiska attackerna av frossa som återkommer med en period på 48 eller 72 timmar. Några av merozoiterna utvecklas till en annan parasitform som kallas gametocyt. Gametocyterna är uppdelade i hanar och honor. Parning mellan dem utgör den sexuella fasen i reproduktionen. Parning sker dock aldrig i människans blod. Om en infekterad människa bits av en mygga av speciellt släkte så kan det hända att det blod som myggan suger i sig innehåller både han- och hon-gametocyter. I så fall utvecklas dessa ytterligare och parning mellan dem sker i myggans kropp. Resultatet av parningen är ytterligare en annan parasitform som fäster sig vid myggans mage i form av en cysta. I denna sker en asexuell reproduktion av sporozoiter. Dessa söker sig till myggans spottkörtlar. När myggan sedan biter en människa så injiceras sporozoiter i människans blodomlopp. Sporozoiterna utvecklas där till merozoiter och därmed är parasitens livscykel slut.

Malaria förekommer huvudsakligen i tropikerna. Dess omfattning är häpnadsväckande. Det uppskattas att 1 miljon barn dör varje år av malaria enbart i Afrika, att 100 miljoner människor insjuknar varje år, och att 300 miljoner människor är kroniskt infekterade.

De myggarter som kan sprida malaria förekommer i Sverige. Malaria har funnits här i äldre tider och fram till början av 1900-talet.

Arbete på matematiska modeller för malaria initierades med den modell som vi beskriver här och som framlades av Ross 1909. Arbete på vidareutveckling av sådana modeller fortgår alltjämt. Ronald Ross (1857–1932) var tropikmedicinprofessor. Han blev berömd för sin upptäckt 1898 av myggans roll i spridningen av malaria och fick nobelpriset i medicin 1902 för denna upptäckt.

En malariamodell är en modell för malariaparasitens ekologi. Som i alla ekologiska modeller är frågor om balans och stabilitet av central betydelse. Den viktigaste frågan sedd ur malariaparasitens synpunkt är om den skall överleva eller gå under. Eftersom denna fråga är av kvalitativ natur är det naturligt att använda den kvalitativa teorin i differentialekvationer för att besvara den. Svaret ges av ett klysnafenomen i modellen.

4.3.2. *Modellformulering.* Vi formulerar en modell för spridningen av malaria i ett givet samhälle med en population av människor och en av myggor. En målsättning med modellen är att beskriva hur infektionsnivåerna bland människor och myggor (tillståndsvariablerna) beror på parametrar som beskriver parasitens biologi och ekologi.

Det första steget i modellformuleringen består i att införa tillståndsvariabler och parametrar. Därefter etableras hypoteser som beskriver de grundläggande mekanismer som påverkar utvecklingen i tiden av tillståndsvariablerna. Som alltid när man formulerar matematiska modeller innebär denna procedur med nödvändighet att modellen blir en förenklad bild av verkligheten.

Rossmodellen innehåller två tillståndsvariabler och fem parametrar. De två tillståndsvariablerna  $X(t)$  och  $Y(t)$  representerar antalet infekterade människor respektive myggor vid tidpunkten  $t$ . Vi antar att populationen av människor är konstant med antalet  $N_1$  och att myggpopulationen är konstant med antalet  $N_2$ . Vidare antar vi att infekterade människor tillfrisknar med intensiteten  $r_1$ . Detta kan tolkas så att antalet människor som tillfrisknar per tidsenhet vid tidpunkten  $t$  är lika med  $r_1$  multiplicerat med antalet infekterade individer vid denna tidpunkt,  $X(t)$ . För myggornas del antar vi att de dör med dödsintensiteten  $r_2$ . För att kunna hålla myggpopulationens storlek konstant måste vi också anta att varje gång en mygga dör så ersätts den med en nyfödd (och oinfekterad) mygga. Den femte parametern är varje myggas bettintensitet  $a_2$ . Därmed menas antalet bett på människa som varje mygga gör per tidsenhet.

En viktig hypotes i modellen är att myggbetten sprids likformigt över människorna. Vi använder denna hypotes för att beräkna infektionsintensiteterna för människor och myggor, d.v.s. antalet människor resp. myggor som blir infekterade per tidsenhet.

Antalet bett som varje mygga gör på varje människa är  $a_1/N_1$  per tidsenhet. Eftersom det finns  $Y(t)$  infekterade myggor så får varje människa  $a_2Y(t)/N_1$  infekterade bett per tidsenhet. Härifrån kan vi beräkna totalantalet nya infektioner i hela populationen av människor per tidsenhet. Vid beräkningen tar vi hänsyn till att endast icke-infekterade människor, av vilka det finns  $N_1 - X(t)$  individer vid tidpunkten  $t$ , kan infekteras. Infektionsintensiteten för människor är därmed  $a_2Y(t)(N_1 - X(t))/N_1$ .

För myggornas del noterar vi åter att varje mygga gör  $a_2/N_1$  bett på varje människa per tidsenhet. Eftersom det finns  $X(t)$  infekterade människor vid tidpunkten  $t$  betyder detta att varje mygga får  $a_2X(t)/N_1$  infektiösa bett per tidsenhet. Varje sådant bett ger en ny mygginfektion när det görs av en icke infekterad mygga. Eftersom

det finns totalt  $N_2 - Y(t)$  oinfekterade myggor vid tidpunkten  $t$  blir infektionsintensiteten för myggor  $a_2 X(t)(N_2 - Y(t))/N_1$ .

Resultatet av modellformuleringen är att vi kan skriva ner följande ekvationssystem för tillståndsvariablerna  $X$  och  $Y$ :

$$\begin{aligned} X' &= \frac{a_2}{N_1} Y(N_1 - X) - r_1 X, \\ Y' &= \frac{a_2}{N_1} X(N_2 - Y) - r_2 Y. \end{aligned}$$

Vi noterar att ekvationerna är kopplade och icke-linjära. En jämförelse med den skalära SIS-modellen visar att man med fog kan beskriva denna malariamodell som en bivariat SIS-modell.

4.3.3. *Modellanalys.* Det första steget i den matematiska analysen av ekvationssystemet ovan består i att genomföra dimensionsanalys och skalning. Tillståndsvariablerna  $X$  och  $Y$  är bägge dimensionslösa eftersom de representerar antalet infekterade människor respektive myggor. De har dock en dimensionslik egenskap, kallad kvasidimension, eftersom de anger antalet enheter av olika typer av individer. Vi inför två tillståndsvariabler  $x = X/N_1$  och  $y = Y/N_2$ , som båda är fria från kvasidimension. Ekvationssystemet för de skalade variablerna  $x$  och  $y$  kan skrivas

$$\begin{aligned} x' &= \frac{a_2 N_2}{N_1} y(1 - x) - r_1 x, \\ y' &= a_2 x(1 - y) - r_2 y. \end{aligned}$$

Antalet parametrar är här oförändrat lika med fem. Genom att bryta ut  $r_1$  respektive  $r_2$  ur de två högerleden får vi

$$(4.5) \quad \begin{aligned} x' &= r_1 [T_1 y(1 - x) - x], \\ y' &= r_2 [T_2 x(1 - y) - y], \end{aligned}$$

där de två transmissionsfaktorerna  $T_1$  och  $T_2$  definieras av

$$(4.6) \quad \begin{aligned} T_1 &= \frac{a_2 N_2}{r_1 N_1}, \\ T_2 &= \frac{a_2}{r_2}. \end{aligned}$$

Härigenom har antalet parametrar reducerats från fem till fyra. Det är dock viktigt att inse att dessa parametrar spelar skilda roller i sin påverkan på lösningarna. De två intensiteterna  $r_1$  och  $r_2$  påverkar derivatorna  $x'$  och  $y'$  och därmed tidsskalorna med vilka förändringar sker, medan de inte har någon inverkan på de kritiska punkterna. De

kritiska punkternas koordinater bestäms entydigt av transmissionsfaktorerna  $T_1$  och  $T_2$ . Det framgår av den följande analysen att typen av fasporträtt bestäms helt av  $T_1$  och  $T_2$ , och att inverkan av  $r_1$  och  $r_2$  på fasporträtten begränsas till sådana sekundära faktorer som lutningarna av de namngivna mångfalderna.

Eftersom  $x$  och  $y$  kan tolkas som proportionerna av människor resp. myggor som är infekterade, så begränsar vi oss i fortsättningen till värden på  $x$  och  $y$  som ligger i det slutna intervallet från noll till ett.

Vi föresätter oss nu att bestämma fasporträttet för ekvationssystemet (4.5) i den slutna enhetskvadraten där  $x$  och  $y$  tar värden mellan 0 och 1. Parametrarna  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $T_1$  och  $T_2$  tillåts ta godtyckliga positiva värden. Vi börjar med att bestämma de två nollisoklinerna där  $x'$  respektive  $y'$  är lika med noll. Genom att sätta  $x' = 0$  finner vi att den första nollisoklinen ges av

$$(4.7) \quad y = \frac{1}{T_1} \frac{x}{1-x}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Den andra nollisoklinen bestäms av villkoret  $y' = 0$ :

$$(4.8) \quad y = \frac{T_2 x}{1 + T_2 x}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Kritiska punkter är skärningspunkter mellan de två nollisoklinerna. Vi ser att det finns två skärningspunkter,  $P_1$  och  $P_2$ . Deras koordinater ges av

$$P_1 = (0, 0)$$

och

$$(4.9) \quad P_2 = \left( \frac{T_1 T_2 - 1}{T_1 T_2 + T_2}, \frac{T_1 T_2 - 1}{T_1 T_2 + T_1} \right).$$

Den kritiska punkten  $P_1$  sammanfaller med origo och kan tolkas som frånvaro av infektion i samhället. Den kritiska punkten  $P_2$  sammanfaller med  $P_1$  när  $T_1 T_2 = 1$ . Vi observerar att dess koordinater är negativa för  $T_1 T_2 < 1$  och positiva för  $T_1 T_2 > 1$ . Negativa koordinater har ingen meningsfull epidemiologisk tolkning. Detta betyder att den kritiska punkten  $P_2$  är av intresse endast för  $T_1 T_2 \geq 1$ . Strikt ovanför tröskeln motsvarar  $P_2$  en endemisk infektionsnivå.

Den jakobianska matrisen för ekvationssystemet (4.5) är

$$(4.10) \quad J = \begin{pmatrix} -r_1(T_1 y + 1) & r_1 T_1(1 - x) \\ r_2 T_2(1 - y) & -r_2(T_2 x + 1) \end{pmatrix}$$

Vi evaluerar först den jakobianska matrisen i den kritiska punkten  $P_1$ :

$$J(P_1) = \begin{pmatrix} -r_1 & r_1 T_1 \\ r_2 T_2 & -r_2 \end{pmatrix}$$

Vi ser härav att spåret för denna matris är

$$\text{sp} = -r_1 - r_2 < 0$$

och att determinanten är

$$\det = r_1 r_2 (1 - T_1 T_2).$$

När spåret är skilt från noll så är den kritiska punkten ickehyperbolisk endast när determinanten är lika med noll. Vi drar därför slutsatsen att den kritiska punkten  $P_1$  är ickehyperbolisk när  $T_1 T_2 = 1$ , och hyperbolisk för alla andra positiva värden på  $T_1$  och  $T_2$ . Klynsna uppträder för  $T_1 T_2 = 1$ . Klynsnamängden, d.v.s. den mängd av värden av de två transmissionsfaktorerna  $T_1$  och  $T_2$  för vilka deras produkt är lika med ett, definierar vad som epidemiologiskt kallas en tröskelfunktion. Ovanför tröskeln, d.v.s. för  $T_1 T_2 > 1$ , är determinanten för matrisen  $J(P_1)$  negativ. Via linjariseringssatsen kan vi då dra slutsatsen att  $P_1$  (origo) är en sadelpunkt. Under tröskeln, för  $T_1 T_2 < 1$  är determinanten positiv. Eftersom spåret är negativt leds vi till slutsatsen att den kritiska punkten  $P_1$  då är en stabil nod eller en stabil spiral. För att bestämma vilket av dessa alternativ som gäller beräknar vi

$$\begin{aligned} (4.11) \quad \frac{1}{4} \text{sp}^2 - \det &= \frac{1}{4} (r_1 + r_2)^2 - r_1 r_2 (1 - T_1 T_2) \\ &= \frac{1}{4} (r_1 - r_2)^2 + r_1 r_2 T_1 T_2 > 0. \end{aligned}$$

Härav drar vi slutsatsen att  $P_1$  under tröskeln är en stabil egentlig nod.

Lutningarna av de namngivna mångfalderna vid  $P_1$  bestäms av lutningarna hos egenvektorerna till matrisen  $J(P_1)$ . Genom att lösa den karakteristiska ekvationen  $\lambda^2 - \text{sp}\lambda + \det = 0$  med ovan angivna uttryck för spåret och determinanten ser vi att egenvärdena till  $J(P_1)$  ges av

$$\lambda = -\frac{1}{2}(r_1 + r_2) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4r_1 r_2 T_1 T_2}.$$

Det minsta av dessa egenvärden benämns  $\lambda_2$  och det största  $\lambda_1$ . Vi har alltså  $\lambda_2 < \lambda_1$ . För sadelpunkten (ovanför tröskeln) betyder detta att  $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ , och för den egentliga noden (under tröskeln) innebär det att  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Egenvektorer som svarar mot de två egenvärdena

kan skrivas

$$\left( r_1 - r_2 \pm \sqrt{(r_1 - r_2)^2 + 4r_1r_2T_1T_2} \right)$$

där plustecknet associeras med  $\lambda_1$  och minustecknet med  $\lambda_2$ . Detta innebär att den snabba mångfalden vid den stabila egentliga noden (som uppträder under tröskeln) och den stabila mångfalden vid sadelpunkten (som uppträder ovanför tröskeln) bägge har negativ lutning vid punkten  $P_1 = (0, 0)$ . Bägge dessa mångfalder kommer därför att ligga utanför enhetskvadraten (åtminstone lokalt nära origo). Vidare kan vi från ovanstående uttryck för egenvektorerna till matrisen  $J(P_1)$  dra slutsatsen att den långsamma mångfalden vid den stabila egentliga noden (som uppträder under tröskeln) och den instabila mångfalden vid sadelpunkten (som uppträder ovanför tröskeln) bägge har positiv lutning vid  $P_1$ . Dessa mångfalder kommer därför (åtminstone lokalt nära origo) att ligga i enhetskvadraten.

Vi fortsätter med att evaluera den jakobianska matrisen i den kritiska punkten  $P_2$ . En rättfram analys här skulle innebära att värdena på  $x$  och  $y$  i (4.10) ersätts med värdena på motsvarande koordinater för punkten  $P_2$  enligt (4.9). Detta leder emellertid till förhållandevis komplicerade uttryck. En förenkling erhålls genom att notera från (4.7) och (4.8) att  $T_1y + 1 = 1/(1 - x)$  och  $T_2x + 1 = 1/(1 - y)$ . Detta ger

$$J(P_2) = \begin{pmatrix} -r_1/(1 - x) & r_1T_1(1 - x) \\ r_2T_2(1 - y) & -r_2/(1 - y) \end{pmatrix}$$

Spåret för denna matris är

$$\text{sp} = -\frac{r_1}{1 - x} - \frac{r_2}{1 - y} < 0,$$

medan determinanten är

$$\det = \frac{r_1r_2}{(1 - x)(1 - y)} - r_1r_2T_1T_2(1 - x)(1 - y).$$

Genom att använda uttrycken för  $x$  och  $y$  från (4.9) ser vi att  $(1 - x)(1 - y) = 1/(T_1T_2)$ . Detta innebär att determinanten för matrisen  $J(P_2)$  kan skrivas

$$\det = \frac{r_1r_2}{(1 - x)(1 - y)} - r_1r_2 = r_1r_2(T_1T_2 - 1).$$

Vi erinrar oss att den kritiska punkten  $P_2$  har icke-negativa koordinater, d.v.s. är epidemiologiskt relevant, endast för  $T_1T_2 \geq 1$ . Vi drar slutsatsen att  $P_2$  är hyperbolisk för  $T_1T_2 > 1$  och ickehyperbolisk för  $T_1T_2 = 1$ . Vi får alltså en indikation om att klyсна uppträder för  $T_1T_2 = 1$  vid bägge kritiska punkterna. Linjariseringssatsen kan tillämpas för  $T_1T_2 > 1$  och vi leds till slutsatsen att  $P_2$  då är en stabil

nod eller en stabil spiral. Valet mellan dessa två alternativ bestäms av tecknet på  $\text{sp}^2/4 - \det$ . En beräkning ger

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}\text{sp}^2 - \det &= \frac{1}{4} \left( \frac{r_1}{1-x} + \frac{r_2}{1-y} \right)^2 - \frac{r_1 r_2}{(1-x)(1-y)} + r_1 r_2 \\ &= \frac{1}{4} \left( \frac{r_1}{1-x} - \frac{r_2}{1-y} \right)^2 + r_1 r_2 > 0. \end{aligned}$$

Eftersom detta uttryck är positivt drar vi slutsatsen att  $P_2$  är en stabil egentlig nod för  $T_1 T_2 > 1$ , d.v.s. ovanför tröskeln.

Lutningarna av de snabba och långsamma mångfalderna bestäms av lutningarna hos egenvektorerna till matrisen  $J(P_2)$ . Egenvärdena ges av

$$\lambda = -\frac{1}{2} \left( \frac{r_1}{1-x} + \frac{r_2}{1-y} \right) \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left( \frac{r_1}{1-x} - \frac{r_2}{1-y} \right)^2 + 4r_1 r_2},$$

där  $x$  och  $y$  är  $x$ - respektive  $y$ -koordinaterna för  $P_2$ , givna av (4.9), och där plustecknet associeras med  $\lambda_1$  och minustecknet med  $\lambda_2$ .

Egenvektorer som svarar mot de två egenvärdena kan skrivas

$$\begin{pmatrix} 2r_1 T_1 (1-x) \\ r_1/(1-x) - r_2/(1-y) \pm \sqrt{(r_1/(1-x) - r_2/(1-y))^2 + 4r_1 r_2} \end{pmatrix}$$

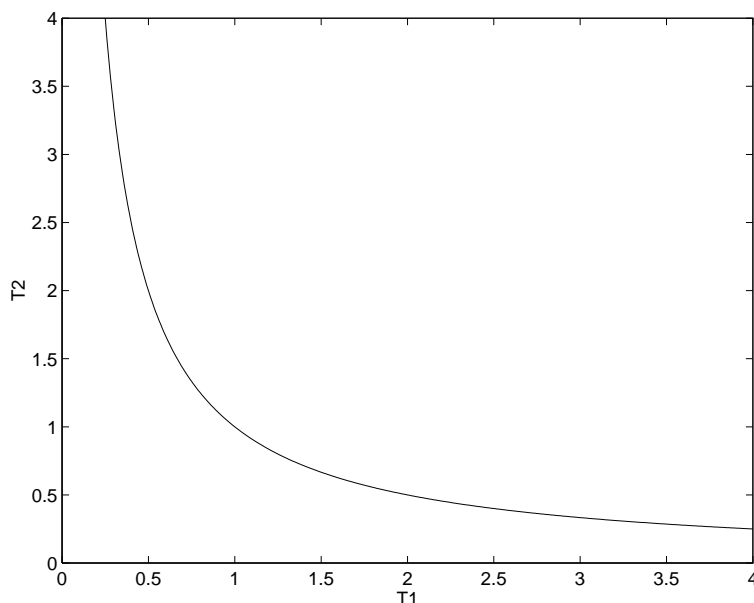
Märk att, i likhet med fallet vid  $P_1$ , den långsamma mångfalden vid  $P_2$  har positiv lutning och den snabba mångfalden har negativ lutning.

Vi noterar att typen av fasporträtt vid var och en av de två kritiska punkterna bestäms enbart av transmissionsfaktorerna  $T_1$  och  $T_2$ , men att sådana detaljer i fasporträttet som mångfaldernas lutningar påverkas både av transmissionsfaktorerna  $T_1$  och  $T_2$  och av de två parametrarna  $r_1$  och  $r_2$ .

De resultat som vi kommit fram till kan sammanfattas på följande sätt:

Klyсна uppträder när  $T_1 T_2 = 1$ . Mängden av alla parametervärden för vilka klyсна uppträder ges av den s.k. klysnamängden. Denna mängd illustreras i figur 7. En epidemiologisk motsvarighet till klysnamängden är tröskelfunktionen  $T_2 = 1/T_1$ .

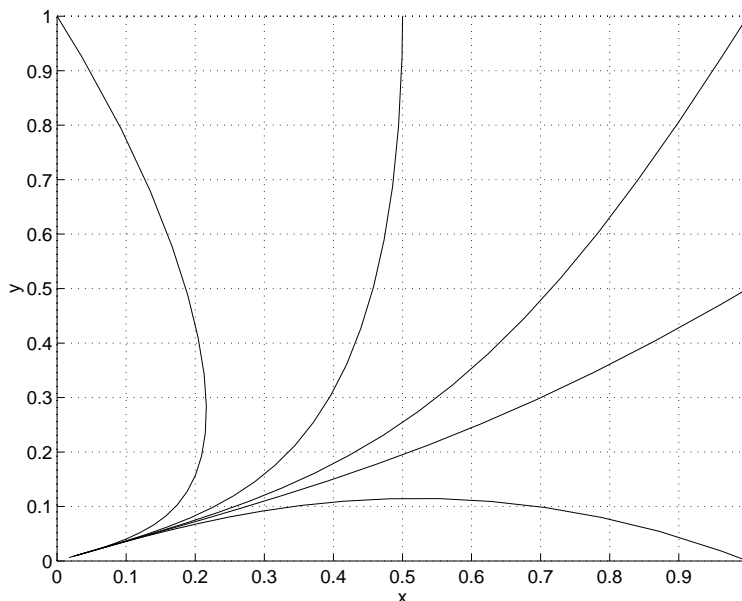
Under tröskeln ( $T_1 T_2 < 1$ ) innehåller fasporträttet i enhetskvadraten en enda kritisk punkt, nämligen origo ( $P_1$ ), och denna kritiska punkt



FIGUR 7. Klysnamängden för Ross' malariamodell utgörs av de punkter i den positiva kvadranten av  $T_1$ - $T_2$ -planet där  $T_1T_2 = 1$ .

är där en stabil egentlig nod vars långsamma mångfald har positiv lutning. Alla banor i enhetskvadraten närmar sig origo när tiden växer. Detta illustreras av fasporträttet i figur 8. Under förutsättning att modellen är tillräckligt realistisk kan vi ge följande epidemiologiska tolkning av detta fasporträtt: Om infekterade människor eller myggor skulle införas till samhället vid någon viss tidpunkt, och om människor, myggor och malariaparasiter sedan lämnas att utvecklas enligt modellens hypoteser, så kommer infektionen att dö ut av sig själv när  $t \rightarrow \infty$ .

Ovanför tröskeln ( $T_1T_2 > 1$ ) har fasporträttet två kritiska punkter i enhetskvadraten, nämligen origo ( $P_1$ ) och punkten  $P_2$  som motsvarar en endemisk infektionsnivå med positiva stationära värden både för proportionen av infekterade människor  $x$  och för proportionen av infekterade myggor  $y$ . Origo är här en sadelpunkt för vilken den instabila mångfalden har positiv lutning, medan  $P_2$  är en stabil egentlig nod. Fasporträttet illustreras i figur 9. Fasporträttet visar att den bana på sadelpunktens instabila mångfald som avlägsnar sig uppåt och åt höger från origo sammanfaller med den bana på den stabila egentliga nodens långsamma mångfald som närmar sig punkten  $P_2$  nerifrån och från vänster. Epidemiologiskt kan vi tolka detta fasporträtt så att det är



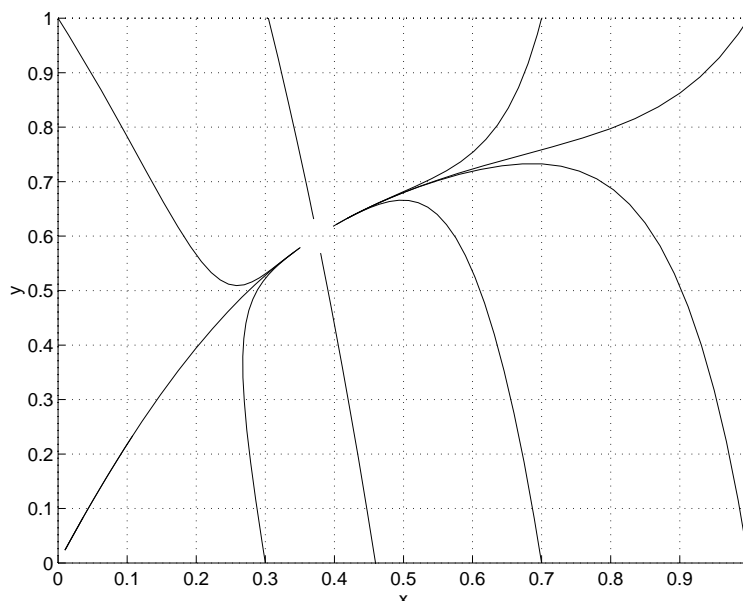
FIGUR 8. Fasporträtt för Ross' malariamodell under tröskeln. Origo är en asymptotiskt stabil kritisk punkt. Alla banor i enhetskvadraten närmar sig origo när tiden växer.

tillräckligt att föra in en enda infekterad människa eller en enda infekterad mygga vid någon tidpunkt. Om människor, myggor och malaria-parasiter sedan lämnas åt sitt öde så kommer infektionsnivåerna bland människor och myggor att av sig själva närma sig de endemiska infektionsnivåerna som ges av punkten  $P_2$ .

Det viktigaste resultatet av vår analys är slutsatsen att klynsna uppträder när  $T_1 T_2 = 1$ . Vi påminner om definitionen: Klynsna äger rum när en liten parameterförändring kan ge en kvalitativ förändring av fasporträttet. Den kvalitativa skillnaden mellan de två fasporträtten i figurerna 8 och 9 är uppenbar. Den epidemiologiska skillnaden är också betydande. En endemisk infektionsnivå med positiv prevalens för både människor och myggor är möjlig endast för samhällen som ligger ovanför tröskeln.

Metoder för utrotning av malaria kan i princip baseras på klysnafenomenet. Enligt modellen kommer infektionen i ett samhälle att dö ut av sig själv om man gör sådana ändringar i parameterrummet att produkten  $T_1 T_2$  hamnar under värdet 1.

Det behövs inga matematiska modeller för att inse att om man dödar alla myggor i ett samhälle så kommer malariainfektionen i det samhället

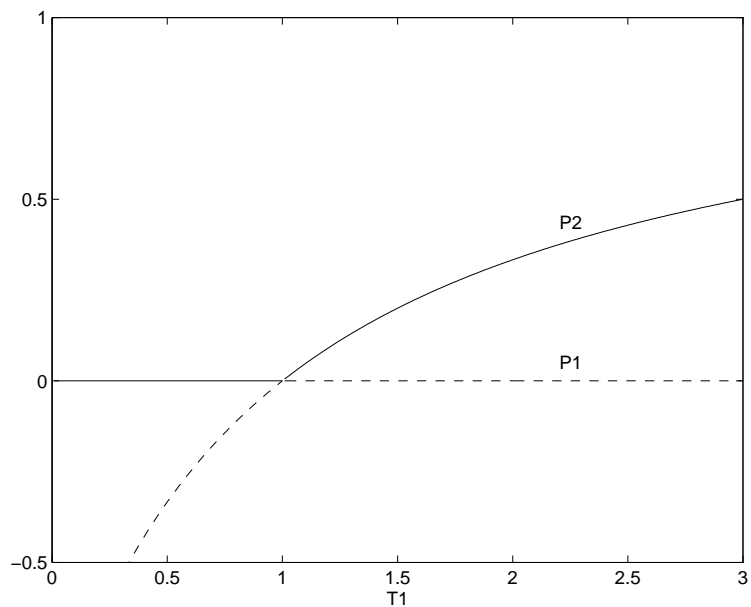


FIGUR 9. Fasporträtt för Ross' malariamodell ovanför tröskeln. Den kritiska punkten  $P_2$  är asymptotiskt stabil. Alla banor i enhetskvadraten (utom origo) närmar sig punkten  $P_2$  när tiden växer.

att dö ut. Däremot är det inte självklart att det räcker att minska myggpopulationen till någon viss bråkdel av dess förutvarande storlek för att malarian skall försvinna. Detta är emellertid den matematiska modellens förutsägelse. Notera från (4.6) att produkten  $T_1T_2$  är proportionell mot antalet myggor  $N_2$ . Antag att man i ett samhälle med en endemisk infektionsnivå genom datainsamling har kunnat uppskatta att  $T_1T_2 = K > 1$ . Man kan då använda modellen för att förutsäga att malarian utrotas om man minskar antalet myggor till det nya antalet  $N_2/K$ . En sådan reduktion kan antas vara lättare att genomföra än en total utrotning av myggorna. Detta är ett exempel på de begreppsmässiga bidrag som matematisk modellering kan göra till epidemiologiska frågeställningar.

Ett klysnadiagram för Ross' malariamodell visas i figur 10. Notera att diagrammet visar hur stationära värden av en tillståndsvariabel (proportionen av infekterade människor  $x$ ) beror på någon av parametrarna (transmissionsfaktorn  $T_1$ ). Diagrammet visar att origo ( $P_1$ ) är stabil under tröskeln och instabil ovanför tröskeln, medan den andra kritiska punkten ( $P_2$ ) har motsatta stabilitetsegenskaper:  $P_2$  är instabil under tröskeln och stabil ovan. Vi uttrycker detta genom att säga att utbyte av stabilitet äger rum när vi passerar klysnamängden i parameterplanet ( $T_1$ - $T_2$ -planet). Diagrammet visar hur de två kritiska

punkterna  $P_1$  och  $P_2$  byter stabilitet när  $T_1$  passerar tröskelvärdet (som ju är 1 i detta fall eftersom  $T_2$  är konstant och lika med 1).



FIGUR 10. Klysnadiagram för Ross' malariamodell visas för  $T_2 = 1$ . X-kordinaterna av de kritiska punkterna  $P_1$  och  $P_2$  visas som funktioner av  $T_1$ . Stabilitet indikeras av heldragen kurva, och instabilitet av streckad kurva.