

SKALNING OCH RESONANS

INGEMAR NÅSELL

ABSTRACT. Dessa föreläsninganteckningar kompletterar Avsnitten 3.8 och 3.9 i kursboken av Boyce och diPrima. De behandlar ett av de viktigaste avsnitten i kursen, nämligen användningen av linjära differentialekvationer av andra ordningen som modeller för mekaniska system. Jag visar att enkla skalningsidéer kan nyttjas för att förenkla parameterrummen för dessa modeller.

1. INLEDNING

Skalning är en metod som är allmänt användbar i många områden av tillämpad matematik. Metoden består i att "avdimensionalisera" de storheter som uppträder i ett givet problem. En av de stora fördelarna med skalningsmetoden är att den ofta leder till en minskning av antalet parametrar som behövs för att matematiskt beskriva lösningen. Detta betyder inte att någon av de ursprungligen givna basparametrarna försvinner utan snarare att de alltid uppträder i vissa kombinationer som kan nyttjas för att definiera nya parametrar som är färre än basparametrarna.

Skalningsmetoden används alltid när man skall genomföra en s. k. perturbationsanalys (störningsräkning). En sådan analys kan ofta leda till goda approximationer till lösningarna till en diffekvation som inte kan lösas explicit. Nu tillhör störningsräkning inte det stoff som ingår i en introduktionskurs i diffekvationer. Detta faktum hindrar dock inte att skalningsmetoden är användbar också vid studiet av elementära diffekvationer.

Det första steget i en skalningsprocess är att utföra en dimensionsanalys. I denna bestämmer man dimensionen av alla parametrar och variabler som ingår i ekvationen. För varje variabel gäller det sedan att bilda en kombination av parametrar som har samma dimension som variabeln. Avdimensionaliseringen av variabeln går så till att man inför en ny, dimensionslös, variabel som bildas som kvoten mellan den ursprungliga variabeln och den identifierade parameterkombinationen. Det medvetna införandet av dimensionslösa variabler leder vanligen till att också parametrarna i problemet kan avdimensionaliseras.

Date: November 14, 2000.

Vi visar hur dimensionsanalys och skalning kan genomföras vid studiet av några av de viktigaste klassiska differentialekvationerna, nämligen de som bestämmer rörelsen hos ett mekaniskt system som består av en massa m fastsatt via en fjäder med fjäderkonstanten k i en fast punkt. Differentialekvationerna är linjära ekvationer av andra ordningen med konstanta koefficienter. Samma typ av differentialekvation uppträder när man vill studera en elektrisk krets som består av en induktans, en kondensator och ett motstånd i serie. De skalningar som genomförs här nedan har sina nära motsvarigheter i skalningen av differentialekvationen för den elektriska kretsen. En skillnad mellan de två problemen är att dimensionerna för problemens oskalade variabler och basparametrar är olika. Denna skillnad är dock oväsentlig för den matematiska behandlingen av problemen.

Vi studerar tre differentialekvationer som uppträder i modeller för tre varianter av det mekaniska problemet. I de första två fallen förutsätter vi att rörelsen är fri, d. v. s. att den sker utan påverkan av någon pålagd yttre kraft. Detta betyder att differentialekvationen i båda dessa fall är homogen, d. v. s. dess högerled är lika med noll. Den allra enklaste situationen studeras i det första fallet, där vi inför den orealistiska hypotesen att alla dämpande krafter negligeras. Den andra modellen som studeras är mera realistisk, då den baseras på antagandet att rörelsen hindras av friktionsdämpning med en dämpningskonstant c . I det tredje fallet studerar vi hur ett system med dämpning påverkas av en periodisk pålagd yttre kraft. Här uppträder det intressanta och intrikata fenomenet med resonans som uppstår genom samverkan mellan periodiciteten hos den yttre kraften och systemets benägenhet till (dämpad) självsvängning.

2. ODÄMPADE FRIA SVÄNGNINGAR

Differentialekvationen som bestämmer rörelsen hos det mekaniska systemet kan skrivas

$$(1) \quad m \frac{d^2 u}{ds^2} + ku = 0.$$

Variablerna i detta problem är u och s , medan parametrarna är m och k . Dimensionerna hos både variabler och parametrar kan uttryckas med hjälp av längd (L), tid (T) och massa (M). Tillståndsvariabeln u betecknar avståndet hos massan från dess viloläge, med dimensionen L . Den oberoende variabeln tid betecknas med s (beteckningen t kommer att användas för skalad tid). Dimensionen för s är T . Bland parametrarna har m dimensionen massa (M), medan fjäderkonstanten k har dimensionen kraft/längd, vilket är lika med M/T^2 . Se Tabell 1

som ger en sammanställning av alla storheter som vi behandlar i de tre modellerna.

Dimensionen L ingår inte i dimensionssammansättningen för någon av de två parametrarna m och k , så i detta problem går det inte att avdimensionalisera u . För avdimensionalisering av tiden s bjuds oss däremot en möjlighet eftersom $\sqrt{m/k}$ har dimensionen T . Vi noterar att denna parameterkombination kan ges en konkret tolkning. Varje lösning till (1) är en periodisk funktion med vinkelfrekvensen $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Vi kan alltså tolka ω_0 som vinkelfrekvensen för odämpade svängningar. Avdimensionalisering av tiden s i ekvation (1) fås genom att införa den nya och dimensionslösa tidsvariabeln $t = \omega_0 s$. Derivatans av u med avseende på den oskalade tidsvariabeln s kan skrivas

$$\frac{du}{ds} = \frac{du}{dt} \frac{dt}{ds} = \omega_0 \frac{du}{dt},$$

och för derivatan av andra ordningen får vi

$$\frac{d^2u}{ds^2} = \omega_0^2 \frac{d^2u}{dt^2}.$$

Insättning av dessa två relationer i ekvation (1) ger efter division med k ekvationen

$$\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0.$$

En jämförelse med ekvation (1) visar att avdimensionaliseringen av tiden s leder oss från en ekvation med två parametrar till en ekvation utan parametrar. Den allmänna lösningen till den skalade differentialekvationen kan skrivas

$$u(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t = K \cos(t - \phi).$$

Lösningen är periodisk och den skalade vinkelfrekvensen är konstant och lika med 1. Lösningen visar att systemet kommer att fortsätta att svänga i evighet utan dämpning. Detta *perpetuum mobile*-beteende är en följd av den orealistiska hypotesen att systemet saknar dämpning.

Det är nyttigt att kunna göra omskrivningen till uttrycket längst till höger i formeln ovan för $u(t)$. Genom att utveckla $\cos(t - \phi)$ som en summa av två termer och sedan jämföra med det först givna uttrycket för $u(t)$ ser vi att amplituden K och fasvinkeln ϕ kan bestämmas från konstanterna c_1 och c_2 genom att lösa de två ekvationerna $K \cos \phi = c_1$ och $K \sin \phi = c_2$. Denna omskrivning används igen i Avsnitt 4, där resonansfenomenet studeras.

Storhet	Dimension	Beskrivning
Variabler:		
u	L	Avstånd
s	T	Tid
Parametrar:		
m	M	Massa
c	M/T	Dämpningskonstant
k	M/T^2	Fjäderkonstant
F	ML/T^2	Yttre kraftens amplitud
ω	$1/T$	Yttre kraftens vinkelfrekvens
Referensparametrar:		
$\omega_0 = \sqrt{k/m}$	$1/T$	Odämpad vinkelfrekvens
$c_0 = 2\sqrt{km}$	M/T	Referensdämpning
$u_0 = F/k$	L	Referensavstånd
Skalade parametrar:		
$\alpha = c/c_0$	1	Dämpning
$\beta = \omega/\omega_0$	1	Frekvens
Skalade variabler:		
$x = u/u_0$	1	Avstånd
$t = \omega_0 s$	1	Tid

TABLE 1. Tabellen visar de variabler och parametrar som behandlas i texten, samt deras dimensioner. Tre referensparametrar definieras. De används för att införa två dimensionslösa skalade parametrar och två dimensionslösa skalade variabler.

3. DÄMPADE FRIA SVÄNGNINGAR

Differentialekvationen för det mekaniska systemets rörelse kan i detta fall skrivas

$$(2) \quad m \frac{d^2 u}{ds^2} + c \frac{du}{ds} + ku = 0.$$

Denna ekvation innehåller en parameter som saknades i ekvation (1), nämligen dämpningskonstanten c . Denna har dimensionen M/T . I detta avsnitt är dämpningskonstanten $c > 0$. (Det odämpade fallet med $c = 0$ behandlades i föregående avsnitt; negativ dämpning är fysikaliskt orealistisk.) Avdimensionalisering av c kräver att vi kan identifiera någon kombination av de ursprungligen givna parametrarna som har samma dimension som c , och som kan nyttjas som

referensdämpning. Denna identifiering kan göras med enbart dimensionsbetraktelser, men vi får bättre förståelse för referensdämpningens betydelse på följande sätt. En standardmetod för att hitta lösningar till (2) är att göra ansatsen $u(s) = \exp(rs)$. Insättning av denna ansats i den givna differentialekvationen leder på känt manér till den karakteristiska ekvationen

$$(3) \quad mr^2 + cr + k = 0,$$

vars lösning kan skrivas

$$(4) \quad r = -\frac{c}{2m} \pm \frac{1}{2m}\sqrt{c^2 - 4km}.$$

Vi vet från det tidigare studiet av linjära differentialekvationer av andra ordningen att lösningarna till den homogena ekvationen (2) tar tre olika former beroende på om uttrycket under kvadratroten ovan är positivt eller negativt eller noll. Gränsfallet när uttrycket under kvadratroten är lika med noll medför att den karakteristiska ekvationen har en dubbelrot. Detta gränfall uppstår när dämpningskonstanten c är lika med $2\sqrt{km}$. Vi definierar därför $c_0 = 2\sqrt{km}$. Denna parameter har samma dimension som c . Den kallas för kritisk dämpning och är vår kandidat för referensdämpning. Med användning av den inför vi den dimensionslösa, skalade, dämpningsparametern α genom att skriva $\alpha = c/c_0$.

Avdimensionalisering av tiden s i (2) göres på samma sätt som i föregående avsnitt genom att sätta $t = \omega_0 s$. Resultatet av denna omskalning av tiden är att ekvationen efter division med k kan skrivas på följande sätt:

$$(5) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + u = 0.$$

I denna ekvation är tiden t och parametern α dimensionslösa, medan tillståndsvariabeln u ej är omskalad. Den karakteristiska ekvation som svarar mot denna ekvation är

$$r^2 + 2\alpha r + 1 = 0.$$

Rötterna till den karakteristiska ekvationen kan skrivas

$$r = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 1}.$$

Om $\alpha > 1$ så vet vi från definitionen av α att systemets dämpningskonstant c är större än den kritiska dämpningen c_0 . Systemet säges då vara *överdämpat*. Den karakteristiska ekvationen har då två reella

distinkta rötter r_1 och r_2 . Den allmänna lösningen till ekvationen (5) kan därmed skrivas

$$u(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}.$$

Kritisk dämpning råder när $\alpha = 1$. Den karakteristiska ekvationen har då en dubbelrot $r = -1$ och den allmänna lösningen till (5) kan skrivas

$$(6) \quad u(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-t}.$$

Om $\alpha < 1$ så säges systemet vara *underdämpat*. Den karakteristiska ekvationen har då två komplexkonjugata rötter som kan skrivas $r = -\alpha \pm i\beta_1$, där β_1 beror på α och därför skrives $\beta_1(\alpha)$. Sambandet mellan β_1 och α ser ut så här:

$$(7) \quad \beta_1(\alpha) = \sqrt{1 - \alpha^2}.$$

Den allmänna lösningen till differentialekvationen (5) skrives i detta fall

$$(8) \quad u(t) = K \exp(-\alpha t) \cos(\beta_1 t - \phi).$$

Detta är en dämpad oscillation. Som vi ser kan den uttryckas som produkten av en exponentialfunktion (vars värde går mot noll när t går mot ∞) och en periodisk funktion med vinkelfrekvensen β_1 . Denna vinkelfrekvens kallas för *kvasivinkelfrekvensen* (eller bara *kvasifrekvensen*) för rörelsen. Vi noterar från sambandet (7) att kvasifrekvensen avtar när dämpningen α ökar. Kvasifrekvensen går mot noll, d. v. s. svängningarna upphör helt, när α närmar sig det kritiska värdet 1. Man kan använda detta faktum för att härleda den allmänna lösningen (6) vid kritisk dämpning från uttrycket (8).

Vi noterar för alla tre fallen överdämpning, kritisk dämpning och underdämpning att lösningen $u(t)$ till differentialekvationen (2) går mot noll när $t \rightarrow \infty$. Detta är en följd av vårt antagande att c och därmed α är positiva.

4. DÄMPADE TVINGADE SVÄNGNINGAR

En yttre periodisk kraft som påverkar det system som vi just studerat modelleras med hjälp av differentialekvationen

$$(9) \quad m \frac{d^2 u}{ds^2} + c \frac{du}{ds} + ku = F \cos \omega s.$$

Här har parametern F dimensionen ML/T^2 . Vi dividerar ekvationen med k och inför, som ovan, den skalade tiden $t = \omega_0 s$. Ekvationen (9)

kan då skrivas om i formen

$$(10) \quad \frac{d^2u}{dt^2} + 2\alpha \frac{du}{dt} + u = \frac{F}{k} \cos(\omega t/\omega_0).$$

Avdimensionalisering av tillståndsvariabeln u är nu möjlig eftersom den nya parametern F innehåller L som en faktor i sin dimension. Notera att parameterkombinationen $u_0 = F/k$ har samma dimension L som tillståndsvariabeln u . Vi inför den som ett referensavstånd, och nyttjar den till att definiera en ny dimensionslös tillståndsvariabel x som $x = u/u_0$. Ekvationen (10) visar också att vi kan skala om vinkelfrekvensen ω hos den yttre kraften genom att sätta $\beta = \omega/\omega_0$. Slutresultatet av dessa skalningar är att ekvationen (10) kan skrivas om på följande sätt:

$$(11) \quad \frac{d^2x}{dt^2} + 2\alpha \frac{dx}{dt} + x = \cos \beta t.$$

En jämförelse mellan ekvationerna (9) och (11) visar att den skalning som vi har utfört har reducerat antalet parametrar från fem till två. De två resterande parametrarna α och β är båda dimensionslösa. Den första av dem är den skalade dämpningskonstanten, medan den andra är den skalade vinkelfrekvensen hos den yttre kraften.

Den allmänna lösningen till ekvation (11) kan enligt vårt tidigare etablerade strukturresultat för inhomogena linjära differentialekvationer skrivas som summan av den allmänna lösningen till den homogena ekvationen och en partikulärlösning till den inhomogena ekvationen. Den första av dessa två komponenter är den allmänna lösningen till ekvationen (5), som har diskuterats ovan. Med $\alpha > 0$ går varje sådan lösning mot noll när $t \rightarrow \infty$. Denna del av lösningen till ekvation (11) kallas därför *transient*. Som partikulärlösning till ekvation (11) väljer vi den *periodiska lösning* som beskriver systemets tillstånd efter det att transienten har dött ut. Denna lösning har vinkelfrekvensen β och en amplitud som vi ännu inte har bestämt. Eftersom ekvationen innehåller parametrarna α och β så kan vi förvänta oss att amplituden hos den periodiska lösningen beror på dessa parametrar. Målsättningen med vårt fortsatta studium är att utröna detta beroende.

En metod för att bestämma en periodisk lösning till ekvation (11) är baserad på att vi först studerar den besläktade komplexa differentialekvationen

$$(12) \quad \frac{d^2z}{dt^2} + 2\alpha \frac{dz}{dt} + z = e^{i\beta t}.$$

Eftersom högerledet av ekvation (11) är realdelen av högerledet till ekvationen (12) så kommer realdelen av en lösning $z(t)$ till (12) att vara en lösning till (11). I sökandet efter en periodisk lösning till (12) gör

vi först ansatsen att det finns en lösning av formen $z(t) = B \exp(i\beta t)$. Derivering och insättning i (12) ger

$$(-\beta^2 + 2i\alpha\beta + 1)Be^{i\beta t} = e^{i\beta t}.$$

Härav följer att

$$B = \frac{1}{1 - \beta^2 + 2i\alpha\beta} = \frac{1 - \beta^2 - 2i\alpha\beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}.$$

En komplexvärd periodisk lösning till (12) kan därför skrivas

$$z(t) = \frac{1 - \beta^2 - 2i\alpha\beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} (\cos \beta t + i \sin \beta t).$$

Det återstår nu bara att bestämma realdelen av denna lösning $z(t)$, så har vi funnit en periodisk lösning till (11). Vi sätter $x(t) = \operatorname{Re} \{z(t)\}$ och får

$$x(t) = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \cos \beta t + \frac{2\alpha\beta}{(1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2} \sin \beta t.$$

Genom att använda trig-formeln

$$\cos(\beta t - \phi) = \cos \beta t \cos \phi + \sin \beta t \sin \phi$$

kan detta resultat förenklas och skrivas om i formen

$$x(t) = K \cos(\beta t - \phi),$$

där K är amplituden och ϕ är en fasvinkel.

Amplituden K hos den tvingade rörelsen bestäms av den skalade dämpningen α och den skalade vinkelfrekvensen β med följande uttryck:

$$K(\alpha, \beta) = \frac{1}{\sqrt{f(\alpha, \beta)}}, \quad \text{där } f(\alpha, \beta) = (1 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2.$$

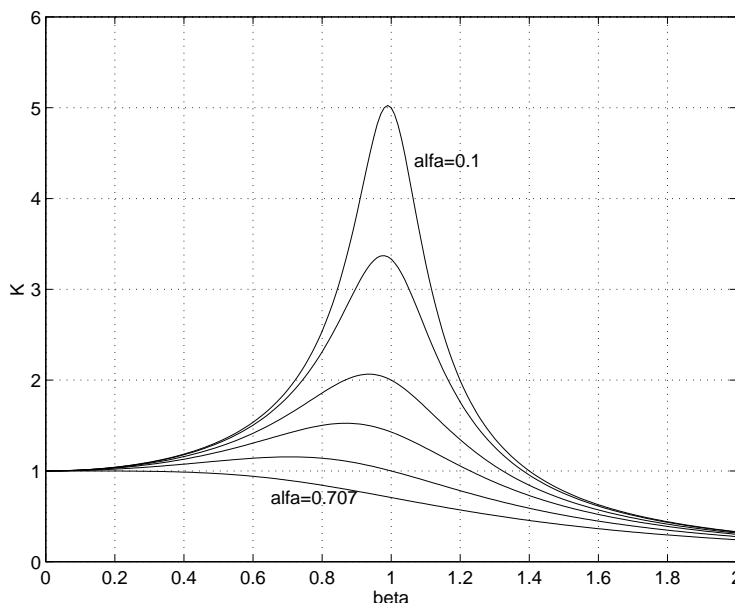
Detta betyder att amplituden K ökar om funktionen f minskar, och att amplituden K har ett maximum om funktionen f har ett minimum.

Fasvinkeln ϕ bestäms enligt

$$\tan \phi = \frac{2\alpha\beta}{1 - \beta^2}, \quad 0 < \phi < \pi.$$

Det är viktigt att notera att man inte utan vidare kan bestämma ϕ som arctan för högerledet ovan. Orsaken är att funktionen arctan tar värden i intervallet från $-\pi/2$ till $\pi/2$, medan den sökta fasvinkeln skall ligga i intervallet från noll till π . Detta betyder att $\phi = \arctan(2\alpha\beta/(1 - \beta^2))$ gäller om argumentet för arcustangens-funktionen är positivt, d.v.s. om $0 < \beta < 1$. För $\beta = 1$ är $\phi = \pi/2$, och för $\beta > 1$ gäller $\phi = \arctan(2\alpha\beta/(1 - \beta^2)) + \pi$.

Grafer som visar amplituden K och fasvinkeln ϕ som funktioner av frekvensen β för några valda värden på dämpningen α visas i Figurerna 1 och 2.



FIGUR 1. Amplituden hos den periodiska lösningen visas som funktion av vinkelfrekvensen β med dämpningen α som parameter. Kurvorna motsvarar α -värdena 0.1, 0.15, 0.25, 0.35, 0.5 och $1/\sqrt{2}$.

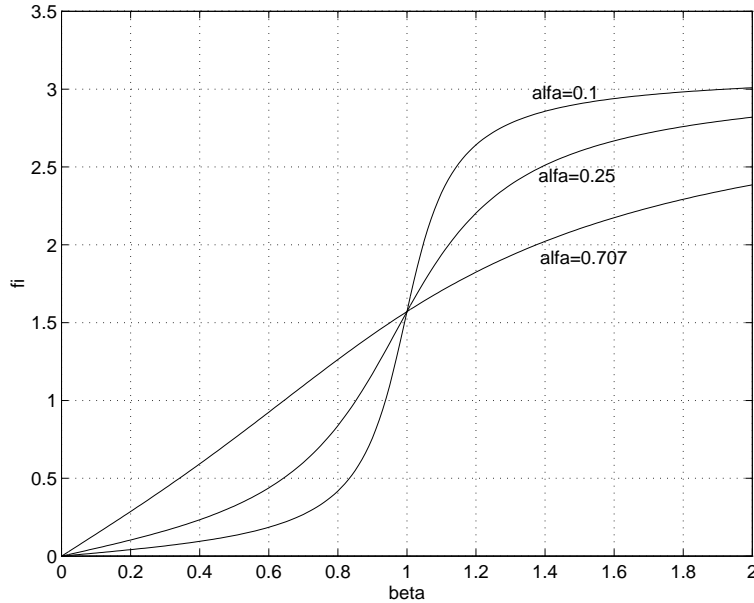
Vi noterar från Figur 1 att amplituden K har ett maximum som funktion av β när α är liten, och att amplituden avtar monotont med β när α är stor. För att i detalj studera detta beteende beräknar vi partiella derivatan av f med avseende på β . Resultatet är

$$\frac{\partial f}{\partial \beta}(\alpha, \beta) = 4\beta(\beta^2 - 1 + 2\alpha^2).$$

Tecknet för denna partiella derivata bestäms (för positiva frekvenser β) av tecknet hos uttrycket som finns innanför parentesen i högerledet. För fixerat värde på dämpningen α ser vi att detta uttryck är en ökande funktion av β . Om uttrycket är större än eller lika med noll när $\beta = 0$ så följer härav att uttrycket är strikt positivt för alla positiva värden på β . Villkoret för att detta skall inträffa är att $2\alpha^2 \geq 1$, d.v.s. att $\alpha \geq \alpha_2 = 1/\sqrt{2}$. När dämpningen överstiger detta värde kommer f att vara en monotont ökande funktion av β för detta fixerade α -värde. Detta betyder att amplituden K avtar monotont som funktion av β för

fixerat α -värde, så som illustreras i Figur 1. Om däremot dämpningen α är mindre än tröskelvärdet $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$ så ser vi att funktionen f för fixt värde på α har ett minimum när $\beta = \beta_2(\alpha)$, där

$$(13) \quad \beta_2(\alpha) = \sqrt{1 - 2\alpha^2}.$$



FIGUR 2. Fasvinkeln för den periodiska lösningen visas som funktion av vinkelfrekvensen β för tre olika värden på dämpningen α .

Detta innebär att amplituden K hos den periodiska lösningen har ett maximum som funktion av β när $\beta = \beta_2$ om α understiger tröskelvärdet $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$. Frekvensen $\beta_2(\alpha)$ anger alltså det värde på den yttre kraftens vinkelfrekvens vid vilket amplituden hos den periodiska lösningen är maximal för det givna värdet på dämpningen α . Vi säger att *amplitudresonans* inträffar när $\beta = \beta_2$. Frekvensen β_2 kallas *resonansfrekvensen*. Vi noterar att den är mindre än kvasifrekvensen β_1 , som i sin tur är mindre än den odämpade självsvängningsfrekvensen 1. Formeln (13) för $\beta_2(\alpha)$ visar att resonansfrekvensen är en avtagande funktion av dämpningen α . Detta illustreras också av Figur 1, eftersom det β -värde för vilket amplituden har maximum avtar när dämpningen ökar.

Vi bestämmer maximivärdet av amplituden hos den periodiska lösningen som funktion av dämpningen α . Vi börjar med att studera funktionen f när den yttre kraftens frekvens är lika med resonansfrekvensen.

Detta betyder att vi begränsar oss till små värden på dämpningen α . Kravet att resonansfrekvensen skall existera innebär ju att dämpningen α ligger under sitt tröskelvärde $\alpha_2 = 1/\sqrt{2}$. Genom att sätta $\beta = \beta_2(\alpha)$ i definitionen av f får vi $f(\alpha, \beta_2(\alpha)) = 4\alpha^2(1 - \alpha^2)$. Kvadratroten ur detta uttryck är $\sqrt{f(\alpha, \beta_2(\alpha))} = 2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2}$. Detta kan också skrivas $\sqrt{f(\alpha, \beta_2(\alpha))} = 2\alpha\beta_1(\alpha)$, där β_1 är kvasivinkelfrekvensen. Den maximala amplituden kan skrivas $K_2(\alpha) = K(\alpha, \beta_2(\alpha)) = 1/(2\alpha\sqrt{1 - \alpha^2})$, där $0 < \alpha < 1/\sqrt{2}$. Härav kan vi dra slutsatsen att maximiamplituden $K_2(\alpha)$ växer obegränsat när dämpningen α går mot noll. Notera också att, som väntat, maximiamplituden är en avtagande funktion av dämpningen α på funktionens definitionsområde $0 < \alpha < 1/\sqrt{2}$.

Figur 2 visar att fasvinkeln ϕ ökar när frekvensen β ökar. Om den yttre kraftens vinkelfrekvens β är liten så är fasvinkeln nära noll. Om å andra sidan frekvensen β är stor så ser vi från Figur 2 att systemets periodiska respons ligger efter den orsakande kraften med en fasvinkel som är nära π .

5. AVSLUTANDE KOMMENTARER

Grundprincipen för skalning är att avdimensionalisera de variabler som uppträder i ett problem. Ett resultat av tillämpningen av denna metod är att antalet parametrar som behövs för att beskriva lösningen till problemet minskar. Vi noterar från de exempel som vi har analyserat att de resulterande parametrarna också är dimensionsfria samt att de bättre än basparametrarna kan användas för att beskriva lösningens beteende. Minskningen av antalet parametrar gör det lättare att genomföra den matematiska analysen. Min beräkning av amplituden hos den periodiska lösningen som funktion av α och β kan jämföras med den beräkning som Boyce och diPrima genomför (ehuru de inte redovisar den i detalj; beräkningarna beskrivs som "rather lengthy"). Jag noterar att deras uttryck (11) på sidan 186 för amplituden hos den periodiska lösningen visar att denna beror på fem parametrar. Fyra av dessa är basparametrar, medan en av dem, ω_0 , är härledd och överensstämmer i både definition och beteckning med den parameter som jag infört som beteckning för den odämpade svängningens oskalade vinkelfrekvens. Införandet av ω_0 har dock inte förenklat deras uttryck för amplituden hos den periodiska lösningen eftersom det inte har gjorts som ett led i en systematisk avdimensionalisering. I figur 3.9.3 i Boyce och diPrima ser vi hur författarnas sammanfattning av resultaten av den matematiska analysen leder dem till en presentation med dimensionslösa storheter. På den horisontella axeln ser vi den dimensionslösa parametern β och på den vertikala axeln avläses den

likaledes dimensionslösa amplituden K hos den periodiska lösningen. Var och en av de olika kurvor som visas i figuren parametreras av en storhet $\Gamma = c^2/(m\omega_0)^2 = (2\alpha)^2$. Denna storhet är dimensionsfri eftersom α är. Boyce och diPrima har alltså hittat en omskalning till dimensionslösa storheter vid presentationen av resultaten. Min rekommendation är att leta efter en omskalning av problemets variabler och parametrar redan innan den matematiska analysen genomförs.