Svar och lösningar, Modul 1.

1A Använd t.ex. följande lexikon:

H : han hör vad som sägs, D : han är döv, O : han är ouppmärksam, M : han kommer att missa mötet.

Vi får **svar:** $\sim H \rightarrow ((D \vee O) \,\&\, M)$

1B Vi har ”Att E bara om inte K är ett nödvändigt villkor för att antingen K eller F (eller båda), men det är också så att inte F om och endast om E.”

Dvs ”$E \rightarrow \sim K$ är ett nödvändigt villkor för $K \vee F$, men det är också så att $\sim F \leftrightarrow E$.”

Dvs **svar:** $((K \vee F) \rightarrow (E \rightarrow \sim K)) \,\&\, (\sim F \leftrightarrow E)$.

1C **a)** ”Kalle skrattar om Lisa kittlar honom eller han inte fryser, men det är inte bara om Lisa kittlar honom som han skrattar”
dvs ”S om (K eller inte F), men inte (S bara om K)”, så
$((K \vee \sim F) \rightarrow S) \,\&\, \sim (S \rightarrow K)$.

b) I den givna tolkningen:

((	K	$\vee$	$\sim$	F	)	$\rightarrow$	S	)	&	$\sim$	(	S	$\rightarrow$	K	)
	0			1			1					1		0	
			0										0		
		0								1					
						1									
									1						

Så meningen är sann under de givna omständigheterna.

1D Båda är betingat sanna.

1E

A	B	C	$(A$	$\vee$	$B)$	$\rightarrow$	C	$(A$	$\rightarrow$	$C)$	&	$(B$	$\rightarrow$	$C)$
1	1	1		1		1			1		1		1	
1	1	0		1		0			0		0		0	
1	0	1		1		1			1		1		1	
1	0	0		1		0			0		0		1	
0	1	1		1		1			1		1		1	
0	1	0		1		0			1		0		0	
0	0	1		0		1			1		1		1	
0	0	0		0		1			1		1		1	

Sentenserna är logiskt ekvivalenta, se de inramade kolumnerna.

1F Arom sade ”Brom och jag är av samma typ bara om det inte är så att någon av oss är kung”
dvs ”$A \leftrightarrow B$ bara om inte $A \vee B$”, så **sentensen:** $(\mathbf{A} \leftrightarrow \mathbf{B}) \rightarrow \sim(\mathbf{A} \vee \mathbf{B})$

Sanningsvärdestabell:

A	B	$(A$	$\leftrightarrow$	$B)$	$\rightarrow$	$\sim$	$(A$	$\vee$	$B)$
1	1		1		$\boxed{0}$	0		1	
1	0		0		$\boxed{1}$	0		1	
0	1		0		$\boxed{1}$	0		1	
0	0		1		$\boxed{1}$	1		0	

Det Arom sade är sant om och endast om han är kung,
så $A \leftrightarrow ((A \leftrightarrow B) \rightarrow \sim(A \vee B))$ är sann. Man ser att enda möjligheten är att **Arom är kung och Brom är narr.**

1G A och B är kungar, C narr.

1H Presidenten är narr.

1I Antag att Alef är kung, dvs att han talar sanning. Då svarade Belef verkligen ”ja”, så han kan inte vara kung (då vore hans svar inte sant) eller narr (då vore hans svar sant).
Alef är alltså narr och ljög om Belefs svar, så Belef svarade ”nej”, vilket är sant (Alef är ju inte kung).
Svaret blir således: **Alef är narr** och **Belef är kung**.
Formellt, om man låter A betyda ”Alef är kung” och B betyda ”Belef är kung”, ser man att Belef svarade ”ja” precis om $B \leftrightarrow (A \,\&\, \sim B)$ är sann, så $A \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \,\&\, \sim B))$ är sann. Med tabell ser man att A är falsk och B sann.

1J Frågan ”Är B och C av samma typ?” är ekvivalent med ”Är antalet kungar bland B och C jämnt?”.
Oberoende av om A är kung eller narr, kommer hans svar på frågan alltså att vara ”ja” om totala antalet kungar bland A, B och C är udda och ”nej” om det är jämnt [tänk efter].
I det aktuella fallet är det totala antalet kungar alltså udda och C kommer också att svara ”ja” på motsvarande fråga om A och B.

1K Den är logiskt giltig.

1L Den enda möjligheten är A, C sanna, B, D, E falska.

1M $p \vDash q \vee r \Rightarrow$ varje modell för p gör $q \vee r$ sann $\Rightarrow$ varje modell för p och för $\sim q$ gör r sann $\Rightarrow$ varje modell för $\sim q$ gör $p \rightarrow r$ sann $\Rightarrow$ $\sim q \vDash p \rightarrow r$
Svaret är alltså ja.

1N Nej, det gäller inte.
Det finns nämligen sentenser p, q, r så att $r \,\&{\sim} p$ är sann i alla tolkningar som gör q sann, samtidigt som det finns tolkningar med $p \leftrightarrow q$ sann och ${\sim} r$ falsk.
Exempelvis $q : \curlywedge$ (eller $A \,\&{\sim} A$), $p : A$, $r : B$ gör q falsk i alla tolkningar, så $q \vDash r \,\&{\sim} p$, medan tolkningen $(A, B) = (0, 1)$ gör $p \leftrightarrow q$ sann och ${\sim} r$ falsk, så $p \leftrightarrow q \nvDash {\sim} r$.
Således $(q \vDash r \,\&{\sim} p) \not\Rightarrow (p \leftrightarrow q \vDash {\sim} r)$.

1O Vi har: α) $p \vDash q$ eller $p \vDash r$ (eller båda), β) $\vDash (p \to q) \vee (p \to r)$, γ) $p \vDash q \vee r$.
γ) är inte uppfyllt precis om det finns en tolkning som gör p sann och $q \vee r$ falsk, dvs q och r båda falska, dvs precis om det finns en tolkning som gör både $p \to q$ och $p \to r$ falska, dvs $(p \to q) \vee (p \to r)$ falsk, dvs precis om β) inte är uppfyllt. $\beta) \Leftrightarrow \gamma$) gäller alltså.
α) betyder att antingen är q sann i alla tolkningar som gör p sann, eller så är r sann i dem alla (eller båda). Men i så fall är $q \vee r$ sann i alla tolkningar som gör p sann, dvs γ) är uppfyllt. Således gäller $\alpha) \Rightarrow \gamma$) och därmed $\alpha) \Rightarrow \beta$).
Om p är A, q är $A \,\&\, B$ och r är $A \,\&{\sim} B$ är tydligen varken $p \vDash q$ eller $p \vDash r$ sanna, så α) är inte uppfyllt, men $p \equiv q \vee r$, så γ) är uppfyllt. Således $\gamma) \not\Rightarrow \alpha$) och därmed $\beta) \not\Rightarrow \alpha$).
Svaret blir alltså att $\alpha) \Rightarrow \beta)$, $\alpha) \Rightarrow \gamma)$, $\beta) \Rightarrow \gamma)$, $\gamma) \Rightarrow \beta$) gäller, medan $\beta) \Rightarrow \alpha)$, $\gamma) \Rightarrow \alpha$) inte gäller.

1P Vi har (för tydlighets skull använder vi här ”sann” och ”falsk” om utsagor i metaspråket och ”0” och ”1” om sentensers sanningsvärden i en tolkning)

- $\alpha)(p \vDash r$ eller $q \vDash r)$ är falsk precis om varken $p \vDash r$ eller $q \vDash r$, dvs om det finns en modell för p som ger r värdet 0 och en (**eventuellt annan**) modell för q som ger r värdet 0

- $\beta)(\vDash (p \to r) \vee (q \to r))$ är falsk precis om det finns en tolkning som ger $(p \to r) \vee (q \to r)$ värdet 0, dvs $p \to r$ och $q \to r$ båda värdet 0, dvs p och q värdet 1 och r värdet 0, dvs om det finns en **gemensam** modell för p och q som ger r värdet 0

- $\gamma)(\vDash (p \,\&\, q) \to r)$ är falsk precis om det finns en tolkning som ger $(p \,\&\, q) \to r$ värdet 0, dvs $p \,\&\, q$ värdet 1 och r värdet 0, dvs om det finns en **gemensam** modell för p och q som ger r värdet 0

Tydligen är β) och γ) sanna för precis samma sentenser p, q, r.
Med $p : A$, $q : B$, $r : A \,\&\, B$ blir α) falsk och $\beta), \gamma$) sanna.

1Q Slutledningen är inte giltig. Visas av tolkningen A, B falska och C sann.

1R Tablå för $A \leftrightarrow (B \,\&\, C),\ \sim C \ \vDash\ A \vee B$:

$$
\begin{array}{rll}
 & \mathbb{T}: & A \leftrightarrow (B \,\&\, C) \quad \surd_3 \\
 & \mathbb{T}: & \sim C \quad \surd_1 \\
 & \mathbb{F}: & A \vee B \quad \surd_2 \\
1 & \mathbb{F}: & C \\
2 & \mathbb{F}: & A \\
2 & \mathbb{F}: & B
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{rll}
3 & \mathbb{T}: & A \\
3 & \mathbb{T}: & B \,\&\, C \\
 & & \times
\end{array}
&
\begin{array}{rll}
3 & \mathbb{F}: & A \\
3 & \mathbb{F}: & B \,\&\, C \quad \surd_4
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{rll}
4 & \mathbb{F}: & B
\end{array}
&
\begin{array}{rll}
4 & \mathbb{F}: & C
\end{array}
\end{array}
$$

Öppen väg   **Öppen väg**

Tablån sluter sig inte, så slutledningen är inte giltig.
På de öppna vägarna läser man av en tolkning som visar detta: A, B och C falska.

1S Tablå för $\sim(A \,\&\, B) \vee C,\ A \rightarrow (B \vee C) \ \vDash\ A \rightarrow C$:

$$
\begin{array}{rll}
 & \mathbb{T}: & \sim(A \,\&\, B) \vee C \quad \surd_2 \\
 & \mathbb{T}: & A \rightarrow (B \vee C) \quad \surd_4 \\
 & \mathbb{F}: & A \rightarrow C \quad \surd_1 \\
1 & \mathbb{T}: & A \\
1 & \mathbb{F}: & C
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{rll}
2 & \mathbb{T}: & \sim(A \,\&\, B) \quad \surd_3 \\
3 & \mathbb{F}: & A \,\&\, B \quad \surd_5
\end{array}
&
\begin{array}{rll}
2 & \mathbb{T}: & C \\
 & & \times
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{rll}
4 & \mathbb{F}: & A \\
 & & \times
\end{array}
&
\begin{array}{rll}
4 & \mathbb{T}: & B \vee C \quad \surd_6
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{rll}
5 & \mathbb{F}: & A \\
 & & \times
\end{array}
&
\begin{array}{rll}
5 & \mathbb{F}: & B
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c|c}
\begin{array}{rll}
6 & \mathbb{T}: & B \\
 & & \times
\end{array}
&
\begin{array}{rll}
6 & \mathbb{T}: & C \\
 & & \times
\end{array}
\end{array}
$$

Tablån sluter sig, så slutledningen är giltig.

1U Sentensen är en tautologi.

1X

1	(1)	$A \to (B \vee \sim C)$	premiss	
2	(2)	$\sim (B \,\&\, C)$	premiss	
3	(3)	C	antagande	
4	(4)	A	antagande	
1,4	(5)	$B \vee \sim C$	1,4	$\to$E
6	(6)	B	antagande	
3,6	(7)	$B \,\&\, C$	6,3	&I
2,3,6	(8)	$\curlywedge$	2,7	$\sim$E
9	(9)	$\sim C$	antagande	
3,9	(10)	$\curlywedge$	9,3	$\sim$E
1,2,3,4	(11)	$\curlywedge$	5,6,8,9,10	$\vee$E
1,2,3	(12)	$\sim A$	4,11	$\sim$I
1,2	(13)	$C \to \sim A$	3,12	$\to$I

Eftersom den önskade sentensen på rad 13 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

Alternativt kan vi göra om $B \vee \sim C$ på rad 5 till $C \to B$ medelst SI-reglerna (Com) och (Imp), varefter önskad motsägelse erhålles snabbare.

1Å Att visa: $A \to (B \vee C)$, $\sim B \vdash \sim A \vee C$.

Utan SI-regler:

1	(1)	$A \to (B \vee C)$	premiss	
2	(2)	$\sim B$	premiss	
3	(3)	$\sim(\sim A \vee C)$	antagande	
4	(4)	A	antagande	
1,4	(5)	$B \vee C$	1,4	$\to$E
6	(6)	B	antagande	
2,6	(7)	$\curlywedge$	2,6	$\sim$E
8	(8)	C	antagande	
8	(9)	$\sim A \vee C$	8	$\vee$I
3,8	(10)	$\curlywedge$	3,9	$\sim$E
1,2,3,4	(11)	$\curlywedge$	5,6,7,8,10	$\vee$E
1,2,3	(12)	$\sim A$	4,11	$\sim$I
1,2,3	(13)	$\sim A \vee C$	12	$\vee$I
1,2,3	(14)	$\curlywedge$	3,13	$\sim$E
1,2	(15)	$\sim\sim(\sim A \vee C)$	3,14	$\sim$I
1,2	(16)	$\sim A \vee C$	15	DN

Med SI-regler (kortare):

1	(1)	$A \to (B \vee C)$	premiss	
2	(2)	$\sim B$	premiss	
3	(3)	A	antagande	
1,3	(4)	$B \vee C$	1,3	$\to$E
1,2,3	(5)	C	4,2	SI(DS)
1,2	(6)	$A \to C$	3,5	$\to$I
1,2	(7)	$\sim A \vee C$	6	SI(Imp)

Eftersom slutsatsen enligt sista raden i båda fallen bara beror av premisserna på raderna 1 och 2, är härledningen klar.

1Ö Att visa: $A \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vdash A \,\&\, B$.

1	(1)	$A \leftrightarrow (A \rightarrow B)$	premiss	
1	(2)	$(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \,\&\, ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$	1	Df
3	(3)	A	antagande	
1	(4)	$A \rightarrow (A \rightarrow B)$	2	&E
1,3	(5)	$A \rightarrow B$	4,3	→E
1,3	(6)	B	5,3	→E
1	(7)	$A \rightarrow B$	3,6	→I
1	(8)	$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	2	&E
1	(9)	A	8,7	→E
1	(10)	B	7,9	→E
1	(11)	$A \,\&\, B$	9,10	&I

Eftersom slutsatsen enligt sista raden bara beror av premissen på rad 1, är härledningen klar.