Svar och lösningar, Modul 2.

2A $\exists x\,(Tx\,\&\,Ex)\ \&\ \forall x\,(Vx \to Sx)$.

2B $\exists x\,(Dx\,\&\,Lx\,\&\,Nx\,\&\,Hx)$.

2C $\forall x\,((Dx\,\&\,Lx\,\&\,Hx) \to Nx)$.

2D "En direktör som nolldeklarerar och äger tre herrgårdar är inte laglydig".
Om "En" är betonat betyder det väl "någon" i enlighet med översättningen:
$\exists x\,(Dx\,\&\,Nx\,\&\,Hx\,\&\!\sim Lx)$.
Om "En" är obetonat betyder det väl "varje" i enlighet med översättningen:
$\forall x\,((Dx\,\&\,Nx\,\&\,Hx) \to \sim Lx)$.
Byt nu "En" mot "Varje": "Varje direktör som ...". Detta kan väl tolkas som det obetonade "En" ovan, men normalt torde man i stället mena att "Det är inte så att varje direktör som nolldeklarerar och äger tre herrgårdar är laglydig, och då blir översättningen:
$\sim\forall x\,((Dx\,\&\,Nx\,\&\,Hx) \to Lx)$.

2E $\forall x\,(Kx \to \exists y\,(Ry\,\&\,(Bx \to Dy)))$.

2F $\exists x\,(Fx\,\&\,\forall y\,(Ry \to (Bx \to Sy)))$.

2G Vi har "Någon som läser logik är glad, men att alla som läser logik är glada gäller bara om ingen som inte läser logik är berömd",
dvs "Det finns x så att Lx och Gx, men för alla y (om Ly så Gy) bara om det inte finns z så att (inte Lz och Bz)",
dvs $\exists x\,(Lx\,\&\,Gx)\ \&\ (\forall y\,(Ly \to Gy) \to\ \sim\exists z\,(\sim Lz\,\&\,Bz))$.

2H

$\forall x\,[(Gx\,\&\!\sim Kx) \to Ax]$	(premiss)
$\exists x\,Kx\,\&\,\exists x \sim Kx$	(premiss)
$\exists x\,Ax$	(slutsats)

Slutledningen är ej korrekt, ty det kan vara så att alla elever i grupp 1 klarar sig, det finns elever utanför grupp 1 som kör, men ingen anser att skrivningen är för svår.

2I Följande tolkning duger: $D = \{\alpha, \beta\}$,

	P	Q	R
α	$+$	$+$	$-$
β	$-$	$+$	$+$

2J Tolkningen: $D = \{\alpha, \beta\}$,

	F	G
α	$+$	$+$
β	$+$	$-$

visar att

$$\forall x\, \exists y\, (Fx \to Gy),\ \exists x \sim Gx \not\models \sim \forall x\, Fx$$

ty i denna tolkning är

- $\forall x\, \exists y\, (Fx \to Gy)$ sann, ty $\exists y\, (Fa \to Gy)$ och $\exists y\, (Fb \to Gy)$ är båda sanna, ty $Fa \to Ga$ och $Fb \to Ga$ är sanna, ty Ga är sann, ty $\alpha \in \mathrm{Ext}(G)$.
- $\exists x \sim Gx$ sann, ty $\sim Gb$ är sann, ty Gb är falsk, ty $\beta \notin \mathrm{Ext}(G)$.
- $\sim \forall x\, Fx$ falsk, ty $\forall x\, Fx$ är sann, ty Fa och Fb är båda sanna, ty $\alpha, \beta \in \mathrm{Ext}(F)$.

2K En tolkning visar att $\exists x\, (\forall y\, Gy \to (A \vee Hx)) \not\models \forall x\, (Gx \to \exists y\, (A \vee Hy))$ precis om den gör $\exists x\, (\forall y\, Gy \to (A \vee Hx))$ sann och $\forall x\, (Gx \to \exists y\, (A \vee Hy))$ falsk. Det senare betyder precis att för **något** namn **s** är $Gs \to \exists y\, (A \vee Hy)$ falsk, dvs **Gs sann** och $\exists y\, (A \vee Hy)$ falsk, dvs för **alla** namn **t** är $A \vee Ht$ falsk, dvs **A falsk** och **Ht falsk**.
$\exists x\, (\forall y\, Gy \to (A \vee Hx))$ blir då sann om för **något t** $\forall y\, Gy \to (A \vee Ht)$ är sann. Men enligt nyss är $A \vee Ht$ falsk för alla t i den sökta tolkningen. Enda möjligheten blir alltså att $\forall y\, Gy$ är falsk, dvs för **något** namn **u** är **Gu falsk**.
Detta leder till tolkningen:

$D = \{\alpha, \beta\}$,

	G	H
α	$+$	$-$
β	$-$	$-$

A
0

2L Här duger tolkningen:

$D = \{\alpha, \beta\}$,

	F	K
α	$+$	$-$
β	$-$	$-$

A
1

2M T.ex. tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(G) = \{\beta\}$.

2N Samma tolkning som i **2M** kan användas.

2O T.ex. tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(F) = \{\alpha\}$, $\mathrm{Ext}(G) = \{\alpha\}$.

2P a) Ej satisfierbar.
b) Satisfierbar, t.ex. tolkningen $D = \{\alpha, \beta\}$, $\mathrm{Ext}(P) = \{\alpha\}$.
c) Satisfierbar (tolkning där ingen individ har egenskapen P).

2Q Slutledningen är giltig.

2S Tablåmetoden ger just den tolkning (det motexempel) som ges i svaret till **2I**.

2V Vi skall visa att $\forall x\,(Fx \to Kx),\ \sim\exists x\,Kx \vdash \sim\exists x\,Fx$.
Idé: Antag motsatsen, att det finns a så att Fa. Första premissen ger $Fa \to Ka$, så Ka och därmed $\exists x\,Kx$, vilket motsäger andra premissen.

1	(1)	$\forall x\,(Fx \to Kx)$	premiss		
2	(2)	$\sim\exists x\,Kx$	premiss		
3	(3)	$\exists x\,Fx$	antagande		
4	(4)	Fa	antagande		
1	(5)	$Fa \to Ka$	1	$\forall$E	
1,4	(6)	Ka	5,4	$\to$E	
1,4	(7)	$\exists x\,Kx$	6	$\exists$I	
1,2,4	(8)	$\curlywedge$	2,7	$\sim$E	
1,2,3	(9)	$\curlywedge$	3,4,8	$\exists$E	[a inte i (3),(8),(1),(2)]
1,2	(10)	$\sim\exists x\,Fx$	3,9	$\sim$I	

Eftersom sentensen på rad 10 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

2W Vi skall visa att $\exists x\,Fx,\ \forall x\,\exists y\,(Fx \to Gy) \vdash \exists x\,Gx$.

1	(1)	$\exists x\,Fx$	premiss		
2	(2)	$\forall x\,\exists y\,(Fx \to Gy)$	premiss		
3	(3)	Fa	antagande		
2	(4)	$\exists y\,(Fa \to Gy)$	2	$\forall$E	
5	(5)	$Fa \to Gb$	antagande		
3,5	(6)	Gb	5,3	$\to$E	
3,5	(7)	$\exists x\,Gx$	6	$\exists$I	
2,3	(8)	$\exists x\,Gx$	4,5,7	$\exists$E	[b inte i (4),(7),(3)]
1,2	(9)	$\exists x\,Gx$	1,3,8	$\exists$E	[a inte i (1),(8),(2)]

Eftersom sentensen på rad 9 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

2X Visa först: $\forall x\,\forall y\,(Px \to Qy) \vdash \exists x\,Px \to \forall x\,Qx$.
Idé: Prova rakt upplägg: anta $\exists x\,Px$, använd $\exists$-elimination, etc.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,(Px \to Qy)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,Px$	antagande		
3	(3)	Pa	antagande		
1	(4)	$\forall y\,(Pa \to Qy)$	1	$\forall$E	
1	(5)	$Pa \to Qb$	4	$\forall$E	
1,3	(6)	Qb	5,3	$\to$E	
1,3	(7)	$\forall x\,Qx$	6	$\forall$I	[b ej i 1,3]
1,2	(8)	$\forall x\,Qx$	2,3,7	$\exists$E	[a ej i 1,2,7]
1	(9)	$\exists x\,Px \to \forall x\,Qx$	2,8	$\to$I	

Eftersom slutsatsen på rad (9) bara beror av premissen på rad (1), är den första delen av beviset klar.

Var god vänd!

Visa sedan: $\exists x\, Px \to \forall x\, Qx \;\vdash\; \forall x \forall y\, (Px \to Qy)$.
Idé: Försök härleda $Pa \to Qb$ beroende på rader där varken a eller b förekommer. Sedan ∀I.

1	(1)	$\exists x\, Px \to \forall x\, Qx$	premiss		
2	(2)	Pa	antagande		
2	(3)	$\exists x\, Px$	2	∃I	
1,2	(4)	$\forall x\, Qx$	1,3	→E	
1,2	(5)	Qb	4	∀E	
1	(6)	$Pa \to Qb$	2,5	→I	
1	(7)	$\forall y\, (Pa \to Qy)$	6	∀I	[b ej i 1]
1	(8)	$\forall x \forall y\, (Px \to Qy)$	7	∀I	[a ej i 1]

2Å Att visa: $A \to \exists x\, Fx \;\vdash\; \exists x\, (A \to Fx)$.
Idé: **Om** A så enligt premissen $\exists x\, Fx$, så Fa för något a. Då gäller $A \to Fa$ för detta A. **Annars** $\sim A$ så $A \to Fa$ för godtyckligt a. I båda fallen fås $\exists x\, (A \to Fx)$.

1	(1)	$A \to \exists x\, Fx$	premiss		
	(2)	$A \lor \sim A$		SI(LEM)	
3	(3)	A	antagande		
1,3	(4)	$\exists x\, Fx$	1,3	→E	
5	(5)	Fa	antagande		
5	(6)	$A \to Fa$	3,5	→I (eller SI(PMI$_1$))	
5	(7)	$\exists x\, (A \to Fx)$	6	∃I	
1,3	(8)	$\exists x\, (A \to Fx)$	4,5,7	∃E	[a inte i (4),(7)]
9	(9)	$\sim A$	antagande		
9	(10)	$A \to Fa$	9	SI(PMI$_2$)	
9	(11)	$\exists x\, (A \to Fx)$	10	∃I	
1	(12)	$\exists x\, (A \to Fx)$	2,3,8,9,11	∨E	

Slutsatsen på rad (12) beror bara av premissen på rad (1), så saken är klar.

2Ä Att visa: $\forall x\, Fx \to \exists x\, Gx \;\vdash\; \exists x\, (Fx \to Gx)$.
Idé: Om Fa är falsk för något a, gäller $Fa \to Ga$.
Annars är $\forall x\, Fx$ sann, och enligt premissen finns a med Ga sann. Då gäller också $Fa \to Ga$.

1	(1)	$\forall x\, Fx \to \exists x\, Gx$	premiss		
2	(2)	$\sim \exists x\, (Fx \to Gx)$	antagande		
3	(3)	$\sim Fa$	antagande		
3	(4)	$Fa \to Ga$	3	SI(PMI$_2$)	
3	(5)	$\exists x\, (Fx \to Gx)$	4	∃I	
2,3	(6)	$\curlywedge$	2,5	∼E	
2	(7)	$\sim\sim Fa$	3,6	∼I	
2	(8)	Fa	7	DN	
2	(9)	$\forall x\, Fx$	8	∀I	[a inte i (2)]
1,2	(10)	$\exists x\, Gx$	1,9	→E	
11	(11)	Ga	antagande		
11	(12)	$Fa \to Ga$	11	SI(PMI$_1$)	
11	(13)	$\exists x\, (Fx \to Gx)$	12	∃I	
2,11	(14)	$\curlywedge$	2,13	∼E	
1,2	(15)	$\curlywedge$	10,11,14	∃E	[a inte i (10),(14),(2)]
1	(16)	$\sim\sim \exists x\, (Fx \to Gx)$	2,15	∼I	
1	(17)	$\exists x\, (Fx \to Gx)$	16	DN	

Var god vänd!

Eftersom slutsatsen på rad (17) bara beror av premissen på rad (1), är saken klar.
Alternativ (kortare, men kanske mindre intuitiv användning av $\exists$E):

1	(1)	$\forall x\, Fx \to \exists x\, Gx$	premiss		
2	(2)	$\sim \exists x\, (Fx \to Gx)$	antagande		
2	(3)	$\forall x \sim (Fx \to Gx)$	2	SI(QS$_3$)	
2	(4)	$\sim (Fa \to Ga)$	3	$\forall$E	
2	(5)	$Fa \,\&\, {\sim} Ga$	4	SI(Neg-Imp)	
2	(6)	Fa	5	&E	
2	(7)	$\forall x\, Fx$	6	$\forall$I	[a inte i (2)]
1,2	(8)	$\exists x\, Gx$	1,7	$\to$E	
9	(9)	Ga	antagande		
2	(10)	$\sim Ga$	5	&E	
2,9	(11)	$\curlywedge$	10,9	$\sim$E	
1,2	(12)	$\curlywedge$	8,9,11	$\exists$E	[a inte i (8),(11),(2)]
1	(13)	$\sim\sim \exists x\, (Fx \to Gx)$	2,12	$\sim$I	
1	(14)	$\exists x\, (Fx \to Gx)$	13	DN	

Alternativet enligt ledningen att omvandla premissen till $\sim \forall x\, Fx \lor \exists x\, Gx$ och använda $\lor$E (samt diverse lämpliga SI-regler) går också på 14 rader.

2Ö Att visa: $\forall x\, \exists y\, (Fx \to Gy) \vdash \exists y\, \forall x\, (Fx \to Gy)$.
Idé: **Om** Fa för något a, ger premissen (med $x = a$) Gb för något b, detta ger slutsatsen (med $y = b$), **annars** gäller $\sim Fa$ för alla a och slutsatsen fås med godtyckligt y. Tvåfallsresonemang, så vi försöker med ett indirekt bevis.

1	(1)	$\forall x\, \exists y\, (Fx \to Gy)$	premiss		
2	(2)	$\sim \exists y\, \forall x\, (Fx \to Gy)$	antagande		
3	(3)	Fa	antagande		
1	(4)	$\exists y\, (Fa \to Gy)$	1	$\forall$E	
5	(5)	$Fa \to Gb$	antagande		
3,5	(6)	Gb	5,3	$\to$E	
3,5	(7)	$Fc \to Gb$	6	SI(PMI$_1$)	
3,5	(8)	$\forall x\, (Fx \to Gb)$	7	$\forall$I	[c inte i (3),(5)]
3,5	(9)	$\exists y\, \forall x\, (Fx \to Gy)$	8	$\exists$I	
2,3,5	(10)	$\curlywedge$	2,9	$\sim$E	
1,2,3	(11)	$\curlywedge$	4,5,10	$\exists$E	[b inte i (4),(10),(2),(3)]
1,2	(12)	$\sim Fa$	3,11	$\sim$I	
1,2	(13)	$Fa \to Gb$	12	SI(PMI$_2$)	
1,2	(14)	$\forall x\, (Fx \to Gb)$	13	$\forall$I	[a inte i (1),(2)]
1,2	(15)	$\exists y\, \forall x\, (Fx \to Gy)$	14	$\exists$I	
1,2	(16)	$\curlywedge$	2,15	$\sim$E	
1	(17)	$\sim\sim \exists y\, \forall x\, (Fx \to Gy)$	2,16	$\sim$I	
1	(18)	$\exists y\, \forall x\, (Fx \to Gy)$	17	DN	

Slutsatsen på rad (18) beror bara av premissen på rad (1), så saken är klar.