Svar och lösningar, Modul 3.

3A Låt domänen vara en samling djur, och använd följande lexikon:

$$
\begin{gathered}
a : \text{apan} \\
g : \text{Gustaf} \\
C\_ : \_ \text{ är en katt} \\
V\_ : \_ \text{ är vit} \\
K\_,\_ : \_ \text{ känner } \_
\end{gathered}
$$

Vi får då följande översättningar:
a) $\forall x\, Kxa \,\&\! \sim\! \exists x\, Kax$
b) $\forall x\, (Cx \rightarrow (Vx \leftrightarrow x \neq g))$

3B Låt domänen vara en samling människor, och använd följande lexikon:

$$
\begin{gathered}
r : \text{Romeo} \\
j : \text{Julia} \\
Fx : x \text{ är en flicka} \\
Axy : x \text{ älskar } y \\
Sx : x \text{ blir svartsjuk} \qquad (\text{i } \mathbf{a)}) \\
Sxy : x \text{ blir svartsjuk på } y \qquad (\text{i } \mathbf{b)})
\end{gathered}
$$

Vi får då följande översättningar:
a) $\exists x\, (Fx \,\&\, x \neq j \,\&\, Axr) \rightarrow Sj$
b) $\forall x\, ((Fx \,\&\, x \neq j \,\&\, Axr) \rightarrow Sjx)$

3C $\forall x\, \exists y\, (Ry \,\&\, Kxy) \,\&\! \sim\! \exists y\, (\forall x\, Kxy \,\&\, Ry)$.

3D (i) $\sim\! \exists x\, (Lx \,\&\, \forall y\, ((Iy \,\&\, Syx) \rightarrow Kyx))$
(ii) $\forall x\, (Lx \rightarrow \exists y\, (Iy \,\&\, Kyx))$

3E Observera att Sxy betyder $x > y$ (strikt olikhet).
Vi finner översättningen: $\sim\! \exists x\, (Px \,\&\, \forall y\, ((Py \,\&\, y \neq x) \rightarrow Sxy))$.

3F **a)** Vi har
"Det finns (minst) en människa som gillar alla hundar som gillar minst två människor."

Dvs

"Det finns x så att (Mx och för alla y: (om (Hy och det finns z och u med (Mz och Mu och Gyz och Gyu och $z \neq u$)) så Gxy))."

Dvs (svaret)

$$\exists x\, (Mx \,\&\, \forall y\, ((Hy \,\&\, \exists z\, \exists u (Mz \,\&\, Mu \,\&\, Gyz \,\&\, Gyu \,\&\, z \neq u)) \rightarrow Gxy)).$$

Var god vänd!

b) Vi har
"Alla hundar gillar (minst) en människa som gillar minst två hundar."
Dvs
"För alla x: (om Hx så finns y så att (My och det finns z och u så att (Hz och Hu och Gyz och Gyu och $z \neq u$) och Gxy))."
Dvs (svaret)

$$\forall x\,(Hx \rightarrow \exists y\,(My \,\&\, \exists z\,\exists u(Hz \,\&\, Hu \,\&\, Gyz \,\&\, Gyu \,\&\, z \neq u) \,\&\, Gxy)).$$

3G 1) "Var och en på Knarrön är precis endera av kung och narr"
dvs "för alla x gäller Kx eller Nx och inte båda"
så **svar**: $\forall x\,((Kx \vee Nx) \,\&\, \sim(Kx \,\&\, Nx))$
2) "Abel är kung och tycker inte om någon kung"
dvs "Ka och för alla x gäller: om x är kung så inte Tax"
så **svar**: $Ka \,\&\, \forall x\,(Kx \rightarrow \sim Tax)$
3) "Bebel tycker om Cebel som tycker om Abel som tycker om Bebel"
dvs "Tbc och Tca och Tab"
så **svar**: $Tbc \,\&\, Tca \,\&\, Tab$
Sentensen $\exists x\,(Nx \,\&\, \exists y\,(Ky \,\&\, Txy))$ betyder i tolkningen "någon narr tycker om en kung". Vi vet att Bebel är narr (hon är inte kung eftersom Abel tycker om henne). Om Cebel är kung, är Bebel en narr som tycker om en kung, annars är Cebel en narr som tycker om en kung (Abel). Hursomhelst är den givna sentensen **sann**.

3H 1) "Ingen är både flodhäst och krokodil"
dvs "Det finns inget x så att både Fx och Kx"
så **svar**: $\sim\exists x\,(Fx \,\&\, Kx)$
2) "Alla ses av någon"
dvs "För alla x finns (minst) ett y, så att y ser x"
så **svar**: $\forall x\,\exists y\,Syx$
3) "Hippo är en flodhäst som inte ses av någon flodhäst",
dvs "Fh och det finns inget x så att x är flodhäst och x ser h"
så **svar**: $Fh \,\&\, \sim\exists x\,(Fx \,\&\, Sxh)$
Sentensen $\exists x\,\exists y\,(Kx \,\&\, Fy \,\&\, Sxy)$ betyder i tolkningen "det finns en krokodil som ser en flodhäst". Detta kan vara sant eller falskt. Någon måste visserligen se Hippo, och det kan inte vara en flodhäst, men det kan vara t.ex. en elefant (vi vet inte att domänen bara innehåller krokodiler och flodhästar).
Så **svaret**: vi vet inte tillräckligt för att kunna avgöra om sentensen är sann eller inte.

3I Låt $D = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \mathrm{Ext}(F) = \{\langle\alpha, \alpha\rangle, \langle\beta, \beta\rangle\}$. $\quad$ Då är

- $\forall x\,\exists y\,Fxy$ **sann**, ty $\exists y\,Fay$ sann (ty Faa är sann, ty $\langle\alpha, \alpha\rangle \in \mathrm{Ext}(F)$) och $\exists y\,Fby$ är sann (ty Fbb är sann, ty $\langle\beta, \beta\rangle \in \mathrm{Ext}(F)$)
- $\exists y\,\forall x\,Fxy$ **falsk**, ty $\forall x\,Fxa$ är falsk (ty Fba är falsk, ty $\langle\beta, \alpha\rangle \notin \mathrm{Ext}(F)$) och $\forall x Fxb$ är falsk (ty Fab är falsk, ty $\langle\alpha, \beta\rangle \notin \mathrm{Ext}(F)$)

Eftersom det finns en tolkning som gör $\forall x\,\exists y\,Fxy$ sann och $\exists y\,\forall x\,Fxy$ falsk, gäller $\forall x\,\exists y\,Fxy \not\models \exists y\,\forall x\,Fxy$.

3J Låt $D = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \text{Ext}(F) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\}$. Då är

- $\exists x\, \forall y\, Fxy$ sann, ty $\forall y\, Fay$ är sann, ty Faa och Fab är sanna, ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle \in \text{Ext}(F)$
- $\forall x\, \forall y\, (Fxy \rightarrow Fyx)$ sann, ty $\forall y\, (Fay \rightarrow Fya)$ är sann (ty $Faa \rightarrow Faa$ och $Fab \rightarrow Fba$ är båda sanna, ty Fba är sann, ty $\langle\beta,\alpha\rangle \in \text{Ext}(F)$) och $\forall y\, (Fby \rightarrow Fyb)$ är sann (ty $Fba \rightarrow Fab$ och $Fbb \rightarrow Fbb$ är båda sanna, ty Fab är sann enligt ovan)
- $\exists x\, \exists y\, \sim Fxy$ sann, ty $\exists y\, \sim Fby$ är sann, ty $\sim Fbb$ är sann, ty Fbb är falsk, ty $\langle\beta,\beta\rangle \notin \text{Ext}(F)$

Denna tolkning är alltså en modell för de givna sentenserna.

3K Låt D vara en mängd av minst tre personer som sitter runt ett bord.
'Fxy' tolkas som "Ref(x) sitter till höger om Ref(y)"
'Gxy' tolkas som "Ref(x) sitter till vänster om Ref(y)"
Då är

- $\forall x\, \exists y\, Fxy$ **sann**, ty varje person sitter till höger om någon
- $\forall x\, \exists y\, Gyx$ **sann**, ty för varje person finns någon som sitter till vänster om den
- $\forall x\, \forall y\, ((Fxy \vee Gxy) \rightarrow x \neq y)$ **sann**, ty ingen sitter till höger eller vänster om sig själv
- $\exists x\, \exists y\, (Fxy\, \&\, Gxy)$ **falsk**, ty eftersom det sitter minst tre personer runt bordet har ingen samma person till höger och vänster.

3L Betrakta tolkningen: $D = \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$,
'Fxy' tolkas som "Ref(x) är efterföljare till Ref(y)", dvs "Ref(x) = Ref(y) + 1"
Då är

- $\forall x\, \exists y\, Fyx$ **sann**, ty varje naturligt tal har ett naturligt tal som efterföljare
- $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Fxy\, \&\, Fxz) \rightarrow y = z)$ **sann**, ty olika tal har olika efterföljare
- $\forall x\, \exists y\, Fxy$ **falsk**, ty $\exists y\, F0y$ är falsk, ty 0 är inte efterföljare till något naturligt tal ('0' är här ett namn för talet 0).

Eftersom det finns en tolkning som gör premisserna sanna och $\forall x\, \exists y\, Fxy$ falsk, gäller $\quad \forall x\, \exists y\, Fyx,\ \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Fxy\, \&\, Fxz) \rightarrow y = z) \nvDash \forall x\, \exists y\, Fxy$.

3M Vi har sentensmängden

$$\{\ \forall x\, \exists y\, Sxy,\ \exists x\, {\sim}Fx,\ \forall x\, (\exists y\, Syx \rightarrow Fx),\ \forall x\, (\forall y\, Syx \rightarrow {\sim}Fx)\ \}$$

Betrakta S:s matris (matrisen med sanningsvärdet för Sxy i tolkningen i positionen xy). Enligt sentens 1 finns minst en 1:a på varje rad. 2 och 3 ger tillsammans att det finns en kolumn med bara 0:or. 3 och 4 ger att ingen kolumn bara innehåller 1:or.
Lite eftertanke visar att det krävs minst tre element i domänen, en lösning ges av:
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \text{Ext}(F) = \{\alpha, \beta\}$, $\quad \text{Ext}(S) = \{\langle\alpha, \alpha\rangle, \langle\beta, \alpha\rangle, \langle\gamma, \beta\rangle\}$.
I denna tolkning är nämligen

- $\forall x\, \exists y\, Sxy$ **sann**, ty
  $\exists y\, Say, \exists y\, Sby, \exists y\, Scy$ är sanna, ty Saa, Sba, Scb är sanna, ty $\langle\alpha, \alpha\rangle, \langle\beta, \alpha\rangle, \langle\gamma, \beta\rangle \in \text{Ext}(S)$
- $\exists x\, {\sim}Fx$ **sann**, ty
  ${\sim}Fc$ är sann, ty Fc är falsk, ty $\gamma \notin \text{Ext}(F)$
- $\forall x\, (\exists y\, Syx \rightarrow Fx)$ **sann**, ty
  $\exists y\, Sya \rightarrow Fa, \exists y\, Syb \rightarrow Fb, \exists y\, Syc \rightarrow Fc$ är sanna, ty Fa, Fb är sanna (ty $\alpha, \beta \in \text{Ext}(F)$) och $\exists y\, Syc$ är falsk, ty Sac, Sbc, Scc är alla falska, ty $\langle\alpha, \gamma\rangle, \langle\beta, \gamma\rangle, \langle\gamma, \gamma\rangle \notin \text{Ext}(S)$
- $\forall x\, (\forall y\, Syx \rightarrow {\sim}Fx)$ **sann**, ty
  $\forall y\, Sya \rightarrow {\sim}Fa, \forall y\, Syb \rightarrow {\sim}Fb, \forall y\, Syc \rightarrow {\sim}Fc$ är sanna, ty $\forall y\, Sya, \forall y\, Syb, \forall y\, Syc$ är falska, ty Sca, Sab, Sac är alla falska, ty $\langle\gamma, \alpha\rangle, \langle\alpha, \beta\rangle, \langle\alpha, \gamma\rangle \notin \text{Ext}(S)$

Tolkningen är alltså en modell för de givna sentenserna
En annan möjlighet är att ta $D = \mathbb{N}$, de naturliga talen, och låta Fx betyda "$x \neq 0$" och Sxy betyda "$y = x + 1$".

3N Om domänen har n element, så kan tolkningen av S ges av en $n \times n$-matris, som har etta i position $xy \iff Sxy$ gäller. Problemet blir då att finna en matris som uppfyller följande tre villkor:

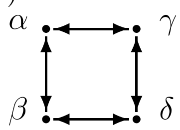
- Någon rad har bara ettor
- Varje rad har minst två ettor
- Ingen kolonn har bara ettor.

Det visar sig att man behöver ta $n \geq 4$. Ett exempel: $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

3O Vi har sentensmängden

$$\{\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z \;\&\; Rxy \;\&\; Rxz), \forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx), \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy \;\&\; Ryz) \rightarrow \sim Rxz)\}$$

Domänen D för en modell får inte vara tom (enligt vår definition av en tolkning), låt $\alpha \in D$.
Sentens 3 ger att $(Raa \;\&\; Raa) \rightarrow \sim Raa$, så Raa är falsk. Enligt sentens 1 finns då två andra element $\beta, \gamma \in D$, så att Rab och Rac är sanna. Enligt sentens 2 gäller $Rab \rightarrow Rba$, dvs Rba sann och med $(Rba \;\&\; Rac) \rightarrow \sim Rbc$ från sentens 3 får man att Rbc är falsk.
Som för Raa ser man att Rbb är falsk, så enligt sentens 1 finns minst ett till element, $\delta \in D$, med Rbd sann.
Vi ser att en modell måste ha minst fyra element i domänen. För att hålla nere antalet element låter vi Rcd vara sann.
Detta leder till tolkningen (se fig.):
$D = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$,
$\text{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle,$
$\langle\beta,\delta\rangle, \langle\delta,\beta\rangle, \langle\delta,\gamma\rangle,$
$\langle\gamma,\delta\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle\}$.



Denna tolkning är en (minimal) modell för den givna sentensmängden, ty i tolkningen är

- $\forall x\,\exists y\,\exists z\,(y \neq z \;\&\; Rxy \;\&\; Rxz)$ **sann**, ty
  i figuren går minst (i själva verket exakt) två pilar från varje element i D,
- $\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx)$ **sann**, ty
  alla pilar i figuren är dubbelriktade,
- $\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy \;\&\; Ryz) \rightarrow \sim Rxz)$ **sann**, ty
  i figuren finns ingen ”sluten triangel” av pilar; om två pilar kommer efter varandra, finns det ingen pil från början av den första till slutet av den andra.

3P Tolkningen

$D = \{\alpha, \beta\}$, $\text{Ext}(R)=\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle\}$, $\text{Ext}(S)=\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle\}$ visar att

$$\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Syx),\ \exists x\,\forall y\,Rxy \not\models \forall y\,\exists x\,Sxy,$$

ty i denna tolkning är

- $\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Syx)$ sann, ty $\forall y\,(Ray \rightarrow Sya)$ och $\forall y\,(Rby \rightarrow Syb)$ är båda sanna, ty $Raa \rightarrow Saa$, $Rab \rightarrow Sba$, $Rba \rightarrow Sab$ och $Rbb \rightarrow Sbb$ är alla sanna, ty Saa och Sba är sanna, ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle \in \text{Ext}(S)$, medan Rba och Rbb är falska, ty $\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \notin \text{Ext}(R)$
- $\exists x\,\forall y\,Rxy$ sann, ty $\forall y\,Ray$ är sann, ty Raa och Rab är sanna,
  ty $\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle \in \text{Ext}(R)$
- $\forall y\,\exists x\,Sxy$ falsk, ty $\exists x\,Sxb$ är falsk, ty Sab och Sbb är båda falska,
  ty $\langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\beta\rangle \notin \text{Ext}(S)$

3Q "Det finns inget x sådant att för varje y gäller att x känner y om och endast om y inte känner y". Vi får översättningen $\sim\exists x\,\forall y\,(Kxy\leftrightarrow\sim Kyy)$. Med tablåmetoden fås

$$\begin{array}{rlcl}
 & \mathbb{F}: & \sim\exists x\,\forall y\,(Kxy\leftrightarrow\sim Kyy) & \surd_1 \\
1 & \mathbb{T}: & \exists x\,\forall y\,(Kxy\leftrightarrow\sim Kyy) & \surd_2 \\
2 & \mathbb{T}: & \forall y\,(Kay\leftrightarrow\sim Kyy) & a_3 \\
3 & \mathbb{T}: & Kaa\leftrightarrow\sim Kaa & \surd_4
\end{array}$$

$$\begin{array}{rlll}
4 & \mathbb{T}: & Kaa & \\
4 & \mathbb{T}: & \sim Kaa & \surd_5 \\
5 & \mathbb{F}: & Kaa & \\
 & & \times &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{rlll}
4 & \mathbb{F}: & Kaa & \\
4 & \mathbb{F}: & \sim Kaa & \surd_6 \\
6 & \mathbb{T}: & Kaa & \\
 & & \times &
\end{array}$$

Tablån sluter sig, så påståendet kan inte falsifieras.

3R Vi vill visa att $\forall x\,\forall y\,(Fxy\rightarrow\sim Fyx)\ \vdash\ \forall x\,\forall y\,(Fxy\rightarrow x\neq y)$.
Idé: om $a=b$ innebär $Fab\rightarrow\sim Fba$ att $Faa\rightarrow\sim Faa$, dvs att Faa, och därmed Fab, är falsk. Om Fab är sann måste alltså $a=b$ vara falsk.

1	(1)	$\forall x\,\forall y\,(Fxy\rightarrow\sim Fyx)$	premiss	
1	(2)	$\forall y\,(Fay\rightarrow\sim Fya)$	1	∀E
1	(3)	$Fab\rightarrow\sim Fba$	2	∀E
4	(4)	Fab	antagande	
1,3	(5)	$\sim Fba$	3,4	→E
6	(6)	$a=b$	antagande	
4,6	(7)	Fbb	6,4	=E
1,4,6	(8)	$\sim Fbb$	6,5	=E
1,4,6	(9)	$\curlywedge$	8,7	∼E
1,4	(10)	$a\neq b$	6,9	∼I
1	(11)	$Fab\rightarrow a\neq b$	4,10	→I
1	(12)	$\forall y\,(Fay\rightarrow a\neq y)$	11	∀I [b inte i (1)]
1	(13)	$\forall x\,\forall y\,(Fxy\rightarrow x\neq y)$	12	∀I [a inte i (1)]

3S Vi skall visa: $\exists x\,(Fx\,\&\,\forall y\,(Gy\rightarrow Hxy))\ \vdash\ \forall x\,(Gx\rightarrow\exists y\,(Fy\,\&\,Hyx))$.

1	(1)	$\exists x\,(Fx\,\&\,\forall y\,(Gy\rightarrow Hxy))$	premiss		
2	(2)	$Fa\,\&\,\forall y\,(Gy\rightarrow Hay)$	antagande		
3	(3)	Gb	antagande		
2	(4)	$\forall y\,(Gy\rightarrow Hay)$	2	&E	
2	(5)	$Gb\rightarrow Hab$	4	∀E	
2,3	(6)	Hab	5,3	→E	
2	(7)	Fa	2	&E	
2,3	(8)	$Fa\,\&\,Hab$	7,6	&I	
2,3	(9)	$\exists y\,(Fy\,\&\,Hyb)$	8	∃I	
1,3	(10)	$\exists y\,(Fy\,\&\,Hyb)$	1,2,9	∃E	[a inte i (1),(9),(3)]
1	(11)	$Gb\rightarrow\exists y\,(Fy\,\&\,Hyb)$	3,10	→I	
1	(12)	$\forall x\,(Gx\rightarrow\exists y\,(Fy\,\&\,Hyx))$	11	∀I	[b inte i (1)]

3T Vi skall visa: $\exists x\, Pxx,\ \forall x\, \exists y \sim Pxy\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, x \neq y$.

Strategi: Använd $\exists$E och $\forall$E på rätt sätt tills man får kvantifikatorfria sentenser, använd satslogiska regler och klä på med $\exists$I.

1	(1)	$\exists x\, Pxx$	premiss		
2	(2)	$\forall x\, \exists y \sim Pxy$	premiss		
3	(3)	Paa	antagande		
2	(4)	$\exists y \sim Pay$	2	$\forall$E	
5	(5)	$\sim Pab$	antagande		
6	(6)	$a = b$	antagande		
3,6	(7)	Pab	6,3	$=$E	
3,5,6	(8)	$\curlywedge$	5,7	$\sim$E	
3,5	(9)	$a \neq b$	6,8	$\sim$I	
3,5	(10)	$\exists y\, a \neq y$	9	$\exists$I	
3,5	(11)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	10	$\exists$I	
2,3	(12)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	4,5,11	$\exists$E	[b inte i 3,4,11]
1,2	(13)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	1,3,12	$\exists$E	[a inte i 1,2,12]

Eftersom sentensen på rad 13 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

3U Vi skall visa: $\exists x\, \forall y\, Qxy,\ \forall x\, \exists y\, (Pxy \vee \sim Qxy)\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, Pxy$.

Strategi: Använd $\exists$E och $\forall$E på rätt sätt tills man får kvantifikatorfria sentenser, använd satslogiska regler och klä på med $\exists$I.

1	(1)	$\exists x\, \forall y\, Qxy$	premiss		
2	(2)	$\forall x\, \exists y\, (Pxy \vee \sim Qxy)$	premiss		
3	(3)	$\forall y\, Qay$	antagande		
2	(4)	$\exists y\, (Pay \vee \sim Qay)$	2	$\forall$E	
5	(5)	$Pab \vee \sim Qab$	antagande		
3	(6)	Qab	3	$\forall$E	
7	(7)	Pab	antagande		
8	(8)	$\sim Qab$	antagande		
3,8	(9)	$\curlywedge$	8,6	$\sim$E	
3,8	(10)	Pab	9	EFQ	
3,5	(11)	Pab	5,7,7,8,12	$\vee$E	
3,5	(12)	$\exists y\, Pay$	11	$\exists$I	
3,5	(13)	$\exists x\, \exists y\, Pxy$	12	$\exists$I	
2,3	(14)	$\exists x\, \exists y\, Pxy$	4,5,13	$\exists$E	[b inte i (4),(13),(3)]
1,2	(15)	$\exists x\, \exists y\, Pxy$	1,3,14	$\exists$E	[a inte i (1),(14),(2)]

Eftersom sentensen på rad 15 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

3V Vi skall visa att
$\exists x\,((B \to Gx) \to A),\ \exists x\,\forall y\,(Fxy \to \sim B),\ \exists x\,\forall y\,(B \to Fyx)\ \vdash\ A\,\&\sim B.$

1	(1)	$\exists x\,((B \to Gx) \to A)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\,\forall y\,(Fxy \to \sim B)$	premiss		
3	(3)	$\exists x\,\forall y\,(B \to Fyx)$	premiss		
4	(4)	B	antagande		
5	(5)	$\forall y\,(Fay \to \sim B)$	antagande		
6	(6)	$\forall y\,(B \to Fyb)$	antagande		
5	(7)	$Fab \to \sim B$	5	∀E	
6	(8)	$B \to Fab$	6	∀E	
4,6	(9)	Fab	8,4	→E	
4,5,6	(10)	$\sim B$	7,9	→E	
4,5,6	(11)	$\curlywedge$	10,4	∼E	
2,4,6	(12)	$\curlywedge$	2,5,11	∃E	[a inte i (2),(4),(6),(11)]
2,3,4	(13)	$\curlywedge$	3,6,12	∃E	[b inte i (2),(3),(4),(12)]
2,3	(14)	$\sim B$	4,13	∼I	
15	(15)	$(B \to Ga) \to A$	antagande		
2,3,4	(16)	Ga	13	EFQ	
2,3	(17)	$B \to Ga$	4,16	→I	
2,3,15	(18)	A	15,17	→E	
1,2,3	(19)	A	1,15,18	∃E	[a inte i (1),(2),(3),(18)]
1,2,3	(20)	$A\,\&\sim B$	19,14	&I	

Eftersom sentensen på rad 20 bara beror av premisserna på raderna 1, 2, 3 är beviset klart.

3W Vi skall visa att $\exists x\,Rax,\ \forall x\,(\exists y\,Ryx \to\ \sim Gx)\ \vdash\ Ga \to \exists x\, a \neq x.$
Idé: Enligt premiss 1 ”går (minst) en pil” från α, till β säg, så Rab gäller. Enligt premiss 2 gäller då $\sim Gb$. Om Ga gäller kan alltså inte $a = b$.

1	(1)	$\exists x\,Rax$	premiss		
2	(2)	$\forall x\,(\exists y\,Ryx \to\ \sim Gx)$	premiss		
3	(3)	Ga	antagande		
4	(4)	Rab	antagande		
4	(5)	$\exists y\,Ryb$	4	∃I	
2	(6)	$\exists y\,Ryb \to\ \sim Gb$	2	∀E	
2,4	(7)	$\sim Gb$	6,5	→E	
8	(8)	$a = b$	antagande		
3,8	(9)	Gb	8,3	=E	
2,3,4,8	(10)	$\curlywedge$	7,9	∼E	
2,3,4	(11)	$a \neq b$	8,10	∼I	
2,3,4	(12)	$\exists x\, a \neq x$	11	∃I	
1,2,3	(13)	$\exists x\, a \neq x$	1,4,12	∃E	[b inte i (1),(12),(2),(3)]
1,2	(14)	$Ga \to \exists x\, a \neq x$	3,13	→I	

Eftersom sentensen på rad 14 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

3X Vi skall visa att $\forall x\,(\exists y \sim Rxy \rightarrow \exists z\, Rxz),\ \exists x\, \exists y \sim Rxy \vdash \exists x\, \exists y\, x \neq y$.
Idé: Enligt premiss 2 gäller $\sim Rab$ för några a, b. Enligt premiss 1 gäller då Rac för något c, samma a. Då är $b \neq c$.

1	(1)	$\forall x\,(\exists y \sim Rxy \rightarrow \exists z\, Rxz)$	premiss		
2	(2)	$\exists x\, \exists y \sim Rxy$	premiss		
3	(3)	$\exists y \sim Ray$	antagande		
4	(4)	$\sim Rab$	antagande		
1	(5)	$\exists y \sim Ray \rightarrow \exists z\, Raz$	1	$\forall$E	
1,3	(6)	$\exists z\, Raz$	5,3	$\rightarrow$E	
7	(7)	Rac	antagande		
8	(8)	$b = c$	antagande		
4,8	(9)	$\sim Rac$	8,4	=E	
4,7,8	(10)	$\curlywedge$	9,7	$\sim$E	
4,7	(11)	$b \neq c$	8,10	$\sim$I	
4,7	(12)	$\exists y\, b \neq y$	11	$\exists$I	
4,7	(13)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	12	$\exists$I	
1,3,4	(14)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	6,7,13	$\exists$E	[c inte i (6),(13),(4)]
1,3	(15)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	3,4,14	$\exists$E	[b inte i (3),(14),(1)]
1,2	(16)	$\exists x\, \exists y\, x \neq y$	2,3,15	$\exists$E	[a inte i (2),(15),(1)]

Eftersom sentensen på rad 16 bara beror av premisserna på raderna 1 och 2 är beviset klart.

3Y Att visa:
$\forall x\, \exists y\, Rxy,\ \forall x\, \forall y\, (\exists z\, (Rxz \,\&\, Rzy) \rightarrow y = x) \vdash \forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$.
Idé: Anta Rab och härled Rba beroende endast på detta antagande och premisserna. Använd den första premissen för $x = b$, antag Rbc (för $\exists$E), och härled sedan $c = a$ med hjälp av den andra premissen, osv

1	(1)	$\forall x\, \exists y\, Rxy$	premiss	
2	(2)	$\forall x\, \forall y\, (\exists z\, (Rxz \,\&\, Rzy) \rightarrow y = x)$	premiss	
3	(3)	Rab	antagande	
1	(4)	$\exists y\, Rby$	1	$\forall$E
5	(5)	Rbc	antagande	
2	(6)	$\forall y\, (\exists z\, (Raz \,\&\, Rzy) \rightarrow y = a)$	2	$\forall$E
2	(7)	$\exists z\, (Raz \,\&\, Rzc) \rightarrow c = a$	6	$\forall$E
3,5	(8)	$Rab \,\&\, Rbc$	3,5	&I
3,5	(9)	$\exists z\, (Raz \,\&\, Rzc)$	8	$\exists$I
2,3,5	(10)	$c = a$	7,9	$\rightarrow$E
2,3,5	(11)	Rba	10,5	= E
2,5	(12)	$Rab \rightarrow Rba$	3,11	$\rightarrow$I
1,2	(13)	$Rab \rightarrow Rba$	4,5,12	$\exists$E [c ej i 2,4,12]
1,2	(14)	$\forall y\, (Ray \rightarrow Rya)$	13	$\forall$I [b ej i 1,2]
1,2	(15)	$\forall x\, \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$	14	$\forall$I [a ej i 1,2]

Eftersom slutsatsen på rad (15) bara beror av premisserna på raderna (1) och (2) är saken klar.

3Z Att visa: $\exists x\, Px,\ \forall x \forall y\, ((Px \,\&\, Py) \rightarrow x = y)\ \vdash\ \exists x \forall y\, (Py \leftrightarrow x = y)$.

Idé: Premisserna betyder "det finns minst ett P" respektive "det finns högst ett P", medan slutsatsen betyder "det finns precis ett P". Det x som ska existera enligt slutsatsen är förstås ett x som existerar enligt första premissen (dvs som benämns i ett motsvarande antagande för $\exists$ - elimination).

1	(1)	$\exists x\, Px$	premiss	
2	(2)	$\forall x \forall y\, ((Px \,\&\, Py) \rightarrow x = y)$	premiss	
3	(3)	Pa	antagande	
4	(4)	Pb	antagande	
3,4	(5)	$Pa \,\&\, Pb$	3,4	&I
2	(6)	$\forall y\, ((Pa \,\&\, Py) \rightarrow a = y)$	2	∀E
2	(7)	$((Pa \,\&\, Pb) \rightarrow a = b)$	6	∀E
2,3,4	(8)	$a = b$	7,5	→E
2,3	(9)	$Pb \rightarrow a = b$	4,8	→I
10	(10)	$a = b$	antagande	
3,10	(11)	Pb	10,3	= E
3	(12)	$a = b \rightarrow Pb$	10,11	→I
2,3	(13)	$(Pb \rightarrow a = b) \,\&\, (a = b \rightarrow Pb)$	9,12	&I
2,3	(14)	$Pb \leftrightarrow a = b$	13	Df
2,3	(15)	$\forall y\, (Py \leftrightarrow a = y)$	14	∀I [b ej i 2,3]
2,3	(16)	$\exists x \forall y\, (Py \leftrightarrow x = y)$	15	∃I
1,2	(17)	$\exists x \forall y\, (Py \leftrightarrow x = y)$	1,3,16	∃E [a ej i 1,2,16]

Eftersom slutsatsen på rad (17) bara beror av premisserna på raderna (1) och (2) är saken klar.

3Å Att visa: $\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx),\ \forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow Rxz),$
$\exists x \forall y \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rxz) \rightarrow y = z)\ \vdash\ \exists x \forall y\, (Rxy \rightarrow x = y)$.

Idé: De två första ger Raa om Rab för något b. Tredje ger, för något a, Rab för högst ett b.

1	(1)	$\forall x \forall y\, (Rxy \rightarrow Ryx)$	premiss		
2	(2)	$\forall x \forall y \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow Rxz)$	premiss		
3	(3)	$\exists x \forall y \forall z\, ((Rxy \,\&\, Rxz) \rightarrow y = z)$	premiss		
4	(4)	$\forall y \forall z\, ((Ray \,\&\, Raz) \rightarrow y = z)$	antagande		
5	(5)	Rab	antagande		
1	(6)	$\forall y\, (Ray \rightarrow Rya)$	1	∀E	
1	(7)	$Rab \rightarrow Rba$	6	∀E	
1,5	(8)	Rba	7,5	→E	
1,5	(9)	$Rab \,\&\, Rba$	5,8	&I	
2	(10)	$\forall y \forall z\, ((Ray \,\&\, Ryz) \rightarrow Raz)$	2	∀E	
2	(11)	$\forall z\, ((Rab \,\&\, Rbz) \rightarrow Raz)$	10	∀E	
2	(12)	$(Rab \,\&\, Rba) \rightarrow Raa$	11	∀E	
1,2,5	(13)	Raa	12,9	→E	
1,2,5	(14)	$Raa \,\&\, Rab$	13,5	&I	
4	(15)	$\forall z\, ((Raa \,\&\, Raz) \rightarrow a = z)$	4	∀E	
4	(16)	$(Raa \,\&\, Rab) \rightarrow a = b$	15	∀E	
1,2,4,5	(17)	$a = b$	16,14	→E	
1,2,4	(18)	$Rab \rightarrow a = b$	5,17	→I	
1,2,4	(19)	$\forall y\, (Ray \rightarrow a = y)$	18	∀I	[b inte i (1),(2),(4)]
1,2,4	(20)	$\exists x \forall y\, (Rxy \rightarrow x = y)$	19	∃I	
1,2,3	(21)	$\exists x \forall y\, (Rxy \rightarrow x = y)$	3,4,20	∃E	[a inte i (3),(20),(1),(2)]

Slutsatsen på rad (21) beror bara av premisserna på raderna (1), (2) och (3), så saken är klar.