Svar och lösningar, Modul 4.

4A **a)** R reflexiv: $\forall x\, Rxx$,
R symmetrisk: $\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Ryx)$,
R transitiv: $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \to Rxz)$.

b) I tolkningen:
$D = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, $\quad \mathrm{Ext}(R) = \{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$ är R reflexiv (ty Raa, Rbb, Rcc alla sanna) och symmetrisk (ty $\langle\xi,\eta\rangle \in \mathrm{Ext}(R) \Rightarrow \langle\eta,\xi\rangle \in \mathrm{Ext}(R)$ för alla ξ,η), men inte transitiv (ty Rab & Rbc är sann, men inte Rac).
Således gäller R reflexiv, R symmetrisk $\not\models$ R transitiv.

4B **a)** Nej. R reflexiv betyder att Raa gäller för alla a. Man har en gemensam vän med sig själv bara om man har någon vän, det har inte alla.
b) Ja. R symmetrisk betyder att att Rba gäller om Rab gör det. Att a och b har en gemensam vän är detsamma som att b och a har det.
c) Nej. R transitiv betyder att Rac gäller om Rab och Rbc gör det. a och b kan ha en gemensam vän och b och c också, utan att a och c har det.

4C **a)** Nej. R reflexiv betyder att Raa gäller för alla a. En bil a som aldrig har krockat (sådana finns) kan inte uppfylla Raa.
b) Ja. R symmetrisk betyder att Rba gäller om Rab gör det. Att a och b har krockat medför att b och a har krockat, och motsvarande i varje steg i en "kedja" av krockade bilar.
c) Ja. R transitiv betyder att Rac gäller om Rab och Rbc gör det. Om det finns en krockkedja från a till b och en från b till c, finns det en från a till c, nämligen de två efter varandra.

4D Om vi låter R vara "skild-ifrån-relationen", dvs Rxy gäller om och endast om $x \neq y$, och låter domänen innehålla minst tre element, så är R irreflexiv och uppfyller $\forall x\, \forall y\, \exists z\, (Rxz \;\&\; Rzy)$. (Ett icke-reflexivt exempel kan fås med två element: $D = \{\alpha, \beta\}$, $Ext(R) = \{(\alpha,\alpha), (\alpha,\beta), (\beta,\alpha))$.

4E Betrakta t.ex. tolkningen D $= \{a, b, c\}$ $\quad$ (egentligen $\{\alpha, \beta, \gamma\}$),
$\mathrm{Ext}(P) = \{(a,a), (b,b), (c,c), (a,c), (b,c)\}$. I denna tolkning är

- $\forall x\, Pxx$ sann, ty Paa, Pbb och Pcc är sanna.
- Observera att för varje val av t, u, v i D som gör både Ptu och Puv sanna, så måste $t = u$ eller $u = v$ gälla. Härav följer att den premiss som säger att relationen är transitiv är sann.
- För varje val av u, v i D gäller Puc & Pvc. Härav följer att den återstående premissen också är sann.
- Slutsatsen blir falsk, ty varken Pab eller Pba är sann, och alltså är $Pab \vee Pba$ falsk.

Alternativ: D $= \mathbb{N} = \{0,1,2,3, ...\}$, Ext($P$) $= \{$(x,y): x delar y$\}$.
Alternativ: D $= \{$delmängder till $\{0,1\}\}$, Ext(P) $= \{$(x,y): x delmängd av y$\}$.

4F En binär relation R som uppfyller $\forall x\, Rxx \,\&\, \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \to Rzx)$ är

- **reflexiv**, dvs $\forall x\, Rxx$, vilket fås med &E i villkoret
- **symmetrisk**, dvs $\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Ryx)$, ty $\forall$E med $x = a, y = b, z = b$ i den andra delen av villkoret ger $(Rab \;\&\; Rbb) \to Rba$, dvs (eftersom Rbb gäller enligt reflexiviteten) $Rab \to Rba$, så klart
- **transitiv**, dvs $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \to Rxz)$, vilket följer ur den andra delen av villkoret (p.g.a. symmetrin ger ju Rzx att Rxz)

Eftersom R är reflexiv, symmetrisk och transitiv är den en ekvivalensrelation, så **svar: Ja**.

4G $\vDash p \vee \sim p$ är sant för varje p. Alltså är R **reflexiv**. Om t.ex. p är $A \vee \sim A$ och q är $\curlywedge$, så gäller $\vDash p \vee \sim q$, dvs Rpq, men inte $\vDash q \vee \sim p$, dvs inte Rqp. Alltså är R **inte symmetrisk**. Anta nu Rpq och Rqr, dvs $\vDash p \vee \sim q$ och $\vDash q \vee \sim r$. Om det funnes någon tolkning vari $p \vee \sim r$ vore falsk, så skulle i denna p vara falsk och r sann. Och då skulle (beroende på om q är sann eller falsk) antingen $p \vee \sim q$ eller $q \vee \sim r$ vara falsk i denna tolkning, i strid med antagandet. Alltså fås $\vDash p \vee \sim r$, dvs Rpr, och vi ser att R **är transitiv**.

$p \vee p$ behöver inte vara satisfierbar, ta t.ex. $p = \curlywedge$. Alltså är S **inte reflexiv**. Vidare gäller att om $p \vee q$ är satisfierbar, så är $q \vee p$ satisfierbar (ta samma tolkning). Alltså är S **symmetrisk**. Och om $p = r = \curlywedge$ och $q = A$, så är ju $p \vee q$ och $q \vee r$ satisfierbara, men inte $p \vee r$. Det följer att S **inte är transitiv**.

4H Vi har en tolkning med ändlig domän D, där R är transitiv,
dvs $\forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy \,\&\, Ryz) \to Rxz)$ är sann, och $\forall x\, \exists y\, Rxy$ gäller.
Låt $\alpha_0 \in D$ (som ju inte är tom). Eftersom $\forall x\, \exists y\, Rxy$ finns $\alpha_1 \in D$, så att Ra_0a_1 är sann. På samma sätt fås en följd $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ sådan attRa_ia_{i+1} gäller för $i = 0, 1, 2, \ldots$.
Eftersom R är transitiv följer ur Ra_ia_{i+1} och $Ra_{i+1}a_{i+2}$ att Ra_ia_{i+2} och på samma sätt att $Ra_ia_{i+3}, Ra_ia_{i+4}, \ldots$, dvs Ra_ja_k gäller om $j < k$.
Men D är ändlig, så inte alla α_i kan vara olika. Det finns alltså j, k med $j < k$ så att $\alpha_j = \alpha_k$ och därför Ra_ja_j, så $\exists x\, Rxx$ är sann i den aktuella tolkningen.

4I Låt ϕx vara formeln $S(x) = S(0)+x$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$, dvs $\forall x\, S(x) = S(0)+x$.
$\phi 0$, dvs $S(0) = S(0) + 0$, gäller enligt axiom P3.
Gör så induktionsantagandet I att ϕa, dvs $S(a) = S(0) + a$, gäller. Vi ska visa $\phi S(a)$, dvs $S(S(a)) = S(0) + S(a)$:
vi finner $S(S(a)) \overset{\mathrm{I}}{=} S(S(0) + a) \overset{\mathrm{P4}}{=} S(0) + S(a)$.
Därmed gäller $\phi a \to \phi S(a)$ för alla a, så $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$ gäller.
Alltså gäller $\phi 0 \,\&\, \forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$ och enligt axiom P7 det önskade $\forall x\, \phi x$.

4J Låt ϕx vara formeln $0 * x = 0$. Vi vill visa $\forall x\, \phi x$.
$\phi 0$ är då $0 * 0 = 0$, vilket gäller enligt axiom P5.
Antag ϕa, dvs $0 * a = 0$.
Då får man $0 * S(a) \overset{P6}{=} 0 * a + 0 \overset{P3}{=} 0 * a \overset{\phi a}{=} 0$, dvs $\phi S(a)$.
Så $\phi a \to \phi S(a)$. Eftersom a var godtyckligt gäller $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$.
Axiom P7 (med $n = 0$) ger det önskade $\forall x\, \phi x$.

4K Se sid. 17 i kompletteringskompendiet K1.

4L Låt ϕx vara formeln $S(0) * x = x$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$, dvs $\forall x\, S(0) * x = x$.
Enligt axiom P5 gäller $S(0) * 0 = 0$, dvs $\phi 0$.
Antag att ϕa gäller, dvs $S(0) * a = a$. Då gäller $S(0) * S(a) \overset{\text{P6}}{=} (S(0) * a) + S(0) \overset{\phi a}{=} a + S(0) \overset{\text{P4}}{=} S(a + 0) \overset{\text{P3}}{=} S(a)$, dvs $\phi S(a)$.
Därmed gäller $\phi a \to \phi S(a)$, för alla a, så $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$ gäller och enligt axiom P7 det önskade $\forall x\, \phi x$.

4M Låt ϕx vara formeln $S(x) \neq x$. Vi vill visa $\forall x\, \phi x$.
$\phi 0$ är då $S(0) \neq 0$, vilket gäller enligt axiom P2.
Antag ϕa, dvs $S(a) \neq a$.
Om då $S(S(a)) = S(a)$ är enligt axiom P1 $S(a) = a$, vilket motsäger ϕa. Det gäller alltså $S(S(a)) \neq S(a)$ om $S(a) \neq a$, dvs $\phi a \to \phi S(a)$. Eftersom a var godtyckligt gäller $\forall x\, (\phi x \to \phi S(x))$.
Axiom P7 (med $n = 0$) ger det önskade $\forall x\, \phi x$.

4N Låt ϕz vara formeln $(a + b) + z = a + (b + z)$. Vi skall först visa $\forall z\, \phi z$.
Enligt axiom P3 gäller $(a + b) + 0 = a + b$ och $a + (b + 0) = a + b$, dvs $\phi 0$.
Antag att ϕc gäller, dvs $(a + b) + c = a + (b + c)$. Då gäller $(a + b) + S(c) \overset{\text{P4}}{=} S((a + b) + c) \overset{\phi c}{=} S(a + (b + c)) \overset{\text{P4}}{=} a + S(b + c) \overset{\text{P4}}{=} a + (b + S(c))$, dvs $\phi S(c)$.
Därmed gäller $\phi c \to \phi S(c)$ för alla c, så $\forall z\, (\phi z \to \phi S(z))$.
Så $\phi 0\ \&\ \forall z\, (\phi z \to \phi S(z))$ gäller och enligt axiom P7 (alfabetiska varianten med z i stället för x) $\forall z\, \phi z$, dvs $\forall z\, (a + b) + z = a + (b + z)$.
Eftersom detta gäller för godtyckliga a, b, får vi det önskade
$\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + y) + z = x + (y + z)$.

4O Låt ϕz vara formeln $a + z = b + z \to a = b$. Vi skall (som i ledningen) först visa $\forall z\, \phi z$.
Enligt axiom P3 gäller $a + 0 = a$ och $b + 0 = b$, så (=E) $a + 0 = b + 0 \to a = b$ dvs $\phi 0$.
Antag att ϕc gäller, dvs $a + c = b + c \to a = b$.
Då gäller $a + S(c) = b + S(c) \stackrel{\text{P4}}{\to} S(a + c) = S(b + c) \stackrel{\text{P1}}{\to} a + c = b + c \stackrel{\phi c}{\to} a = b$, dvs $\phi S(c)$.
Därmed gäller $\phi c \to \phi S(c)$, för alla c, så (∀I) $\forall z\, (\phi z \to \phi S(z))$.
Så $\phi 0$ & $\forall z\, (\phi z \to \phi S(z))$ gäller och enligt axiom P7 (med $n = 0$, alfabetiska varianten med z i stället för x) $\forall z\, \phi z$, dvs $\forall z\, (a + z = b + z \to a = b)$.
Eftersom detta gäller för godtyckliga a, b, får vi (∀I) det önskade $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + z = y + z \to x = y)$.

4P Låt ϕy vara formeln $a + y = 0 \to (a = 0\ \&\ y = 0)$. Vi skall visa $\forall y\, \phi y$.
Enligt axiom P3 är $a + 0 = a$, så $a + 0 = 0$ medför $a = 0$, dvs $a + 0 = 0 \to (a = 0\ \&\ 0 = 0)$ är sann, så $\phi 0$ är sann.
Antag nu att ϕb gäller, dvs $a + b = 0 \to (a = 0\ \&\ b = 0)$.
Vi vill visa $\phi S(b)$: $a + S(b) = 0 \to (a = 0\ \&\ S(b) = 0)$.
Enligt axiom P4 och P2 är $a + S(b) = S(a + b) \neq 0$, så $\phi S(b)$ är sann (obs att induktionsantagandet ej behövde användas).
Som b är godtycklig fås $\forall y\, (\phi y \to \phi S(y))$.
Axiom P7 ger nu $\forall y\, \phi y$, och som a är godtycklig fås det önskade $\forall x\, \forall y\, (x + y = 0 \to (x = 0\ \&\ y = 0))$.
Kommentar: resultatet följer redan ur Q-axiomen, som ju är svagare än Peanos axiom.