KTH Matematik
Jan Kristoferson
2006

Problemsamling

till repetitionskurs i LOGIK (5B1928)

för D och IT

Följande uppgifter är huvudsakligen hämtade från A-delen av äldre tentor och från äldre kontrollskrivningar. De är liksom repetitionskursen i sin helhet indelade i fyra moduler.

	sidan
Uppgifter till modul 1, Satslogik	3
Uppgifter till modul 2, Monadisk predikatlogik	7
Uppgifter till modul 3, Första ordningens predikatlogik med identitet	10
Uppgifter till modul 4, Binära relationer och Peano-aritmetik	14
Ledningar till modul 1	16
Ledningar till modul 2	17
Ledningar till modul 3	18
Ledningar till modul 4	19

Uppgifter till Modul 1.

Översätt följande till satslogiska sentenser:

1A "Om han inte hör vad som sägs, så är han antingen döv eller ouppmärksam, och kommer att missa mötet." (Inför själv lexikon)

1B "Att elefanterna närmar sig vattenhålet bara om krokodilerna inte lurar i strandkanten är ett nödvändigt villkor för att antingen krokodilerna skall lura i strandkanten eller flodhästarna skall tjafsa i skogsbrynet (eller båda), men det är också så att flodhästarna inte tjafsar i skogsbrynet om och endast om elefanterna närmar sig vattenhålet."

Använd följande lexikon:
E : Elefanterna närmar sig vattenhålet,
F : Flodhästarna tjafsar i skogsbrynet,
K : Krokodilerna lurar i strandkanten.

1C **a)** "Kalle skrattar om Lisa kittlar honom eller han inte fryser, men det är inte bara om Lisa kittlar honom som han skrattar."

Använd följande lexikon:
S : Kalle skrattar, K : Lisa kittlar Kalle, F : Kalle fryser.

b) Använd din satslogiska sentens från **a)** för att avgöra om den givna meningen är sann eller falsk om Kalle fryser och skrattar och Lisa inte kittlar honom.

1D Ställ upp sanningsvärdestabellerna för följande sentenser, och avgör om de är logiskt giltiga (tautologier), betingat sanna eller icke satisfierbara (kontradiktioner).

a) $(\sim(A \rightarrow B)\,\&\sim C) \leftrightarrow (A \vee \sim B)$

b) $(\sim(A \leftrightarrow B) \vee \sim C) \rightarrow (A\,\&\sim B)$

1E Ställ upp sanningsvärdestabellerna för de båda sentenserna

$$(A \vee B) \rightarrow C \quad \text{och} \quad (A \rightarrow C)\,\&\,(B \rightarrow C)$$

och avgör om de är logiskt ekvivalenta.

1F Arom och Brom är båda från Knarrön (var och en av dem är alltså antingen kung (och talar alltid sanning) eller narr (och ljuger alltid)). Arom (som följer en kurs i logik och ibland uttrycker sig lite egendomligt) säger:
"Brom och jag är av samma typ (dvs båda kungar eller båda narrar) bara om det inte är så att någon av oss är kung".
Formulera innehållet i Aroms uttalande som en satslogisk sentens och ställ upp dess sanningsvärdestabell. Använd sedan tabellen för att avgöra för var och en av Arom och Brom om han är kung eller narr.

Använd följande lexikon:
A : Arom är kung, B : Brom är kung.

1G Till Knarrön (där ju var och en antingen är kung (och alltid talar sanning) eller narr (och alltid ljuger)) strömmar forskare i ämnet etnologik.
En sådan träffade där en gång tre öbor A, B och C. Dessa gjorde följande uttalanden:
A: “Om B är kung så är C narr”.
B: “Om C är kung så är A narr”.
C: “Exakt en av oss är kung”.
Vad är A, B och C?

1H Alla knarröbor är precis endera av kung (och talar då alltid sanning) och narr (och ljuger då alltid). Knarrön är (trots ett stort antal kungar) republik, med (exakt) en president.
Öborna A, B och C gör följande påståenden. A: “B är president.”
B: “Minst två av oss tre är narrar.” C: “Jag är inte president.”
Är presidenten kung eller narr?

1I De båda knarröborna Alef och Belef är var och en, liksom alla andra på ön, antingen kung (och talar då alltid sanning) eller narr (och ljuger då alltid).
På frågan: “Stämmer det att Alef är kung och du narr?”, svarar Belef ohörbart.
Alef (som hörde svaret) förklarar: “Han svarade ‘ja’.”
Avgör för var och en av Alef och Belef om han är kung eller narr.

1J Vi befinner oss på den exotiska Knarrön. Som vi minns befolkas denna ö av två till det yttre inte särskiljbara grupper, var och en med sin egen bestämda inställning till sanningen. Kungar (eng. knights) talar alltid sanning, medan narrar (eng. knaves) alltid ljuger.
Vi möter tre öbor, A, B och C (också namnskicket är lite avvikande på ön). A säger: “B och C är av samma typ” (dvs båda kungar eller båda narrar). Kan vi veta vad C svarar när vi frågar om A och B är av samma typ? I så fall, vad svarar han? Motivera ordentligt!

1K Avgör om sentensen

$$(A \rightarrow B) \leftrightarrow (B \leftrightarrow (A \vee B))$$

är logiskt giltig (tautolog) eller ej. I det senare fallet skall en falsifierande tolkning anges.

1L Konstruera utan att använda tablåmetoden en tolkning som visar att

$$A \rightarrow (C \vee E),\ B \rightarrow D \not\models (A \vee B) \rightarrow [C \rightarrow (D \vee E)].$$

1M Avgör om $(p \models q \vee r) \Rightarrow (\sim q \models p \rightarrow r)$. Dvs om p, q, r är sentenser sådana att $p \models q \vee r$, måste då $\sim q \models p \rightarrow r$?

1N Avgör om $(q \models r \,\&\, \sim p) \Rightarrow (p \leftrightarrow q \models \sim r)$. Dvs om p, q, r är sentenser sådana att $q \models r \,\&\, \sim p$, måste då $p \leftrightarrow q \models \sim r$?

1O Betrakta följande tre påståenden om sentenserna p, q, r:
$\alpha)$ $p \vDash q$ eller $p \vDash r$, $\beta)$ $\vDash (p \to q) \vee (p \to r)$, $\gamma)$ $p \vDash q \vee r$.
Avgör för var och en av följande implikationer om den gäller eller inte:
$\alpha) \Rightarrow \beta)$, $\beta) \Rightarrow \alpha)$, $\beta) \Rightarrow \gamma)$, $\gamma) \Rightarrow \beta)$, $\gamma) \Rightarrow \alpha)$, $\alpha) \Rightarrow \gamma)$,
dvs om $\alpha)$ är sant för vissa p, q, r, måste då $\beta)$ vara sant för samma p, q, r etc.?

1P Betrakta följande påståenden om de logiska sentenserna p, q, r:
$\alpha)$ $p \vDash r$ eller $q \vDash r$ (eller båda),
$\beta)$ $\vDash (p \to r) \vee (q \to r)$,
$\gamma)$ $\vDash (p \,\&\, q) \to r$.
Visa att två av dessa är sanna för precis samma p, q, r och finn p, q, r så att varken alla α, β, γ är sanna eller alla är falska.

1Q Avgör med tablåmetoden om följande gäller. Om det inte gäller, använd tablån för att finna en tolkning som visar detta.

$$(A \vee B) \to \sim C,\ C \,\&\! \sim B \vDash \sim A \,\&\, B$$

1R Avgör med tablåmetoden om följande gäller. Om det inte gäller, använd tablån för att finna en tolkning som visar detta.

$$A \leftrightarrow (B \,\&\, C),\ \sim C \vDash A \vee B.$$

1S Avgör med tablåmetoden om följande gäller. Om det inte gäller, använd tablån för att finna en tolkning som visar detta.

$$\sim (A \,\&\, B) \vee C,\ A \to (B \vee C) \vDash A \to C.$$

1T Visa med tablåmetoden att

$$A \vee \sim C,\ (A \vee B) \to C \vDash A \leftrightarrow C.$$

1U Använd tablåmetoden för att avgöra om sentensen
$[(A \& B) \to (B \& C)] \vee [(A \& C) \to (B \& C)]$ är en tautologi. Om den inte är det, ange en tilldelning av sanningsvärden till A, B, C som gör sentensen falsk.

1V Visa med naturlig deduktion att

$$A \to (B \,\&\, C),\ \sim (A \,\&\, B) \vdash \sim A.$$

1W Visa med naturlig deduktion att

$$C \to B,\ (A \,\&\! \sim B) \to C \vdash A \to B.$$

1X Visa med naturlig deduktion att

$$A \to (B \vee \sim C),\ \sim (B \,\&\, C) \vdash C \to \sim A.$$

1Y Visa med naturlig deduktion att

$$(\sim A \,\&\, B) \to \sim C,\ \sim A \vee \sim C \vDash C \to \sim B.$$

1Z Visa med naturlig deduktion att

$$A \vee (B \rightarrow C) \vdash B \rightarrow (A \vee C).$$

1Å Visa med naturlig deduktion att

$$A \rightarrow (B \vee C),\ \sim B \vdash \sim A \vee C.$$

1Ä Visa

$$\sim (A \vee B) \vee A \equiv B \rightarrow A$$

genom att med naturlig deduktion visa
a) $\sim (A \vee B) \vee A \vdash B \rightarrow A.$
b) $B \rightarrow A \vdash \sim (A \vee B) \vee A.$

1Ö Visa med naturlig deduktion att

$$A \leftrightarrow (A \rightarrow B) \vdash A \,\&\, B.$$

Uppgifter till Modul 2.

2A Betrakta domänen av alla sagofigurer samt följande lexikon:

$$\begin{aligned} T\_ &: \ \_ \text{ är ett troll} \\ V\_ &: \ \_ \text{ är en vätte} \\ E\_ &: \ \_ \text{ är elak} \\ S\_ &: \ \_ \text{ är snäll} \end{aligned}$$

Översätt till en predikatlogisk sentens:
"Det finns elaka troll, men alla vättar är snälla."

2B Betrakta domänen av alla människor samt följande lexikon:

$$\begin{aligned} L\_ &: \ \_ \text{ är laglydig} \\ D\_ &: \ \_ \text{ är en direktör} \\ N\_ &: \ \_ \text{ nolldeklarerar} \\ H\_ &: \ \_ \text{ äger tre herrgårdar} \end{aligned}$$

Översätt till en predikatlogisk sentens:
"Det finns någon laglydig direktör som nolldeklarerar och äger tre herrgårdar."

2C Samma domän och lexikon som i 2B.
Översätt till en predikatlogisk sentens:
"Alla laglydiga direktörer som äger tre herrgårdar nolldeklarerar."

2D Samma domän och lexikon som i 2B.
Översätt till en predikatlogisk sentens:
"En direktör som nolldeklarerar och äger tre herrgårdar är inte laglydig."
Dito med "Varje" i stället för "En".
(Observera flertydigheten i båda fallen!)

2E Uttryck följande med en predikatlogisk sentens:
"För varje katt finns någon råtta som dansar på bordet om katten är borta."
Använd följande lexikon:
$B\_$: _ är borta,
$D\_$: _ dansar på bordet,
$K\_$: _ är en katt,
$R\_$: _ är en råtta.

2F Uttryck följande med en predikatlogisk sentens:
"Det finns (minst) ett får så att alla rävar skrattar om fåret bräker."
Använd följande lexikon:
$B\_$: _ bräker,
$F\_$: _ är ett får,
$R\_$: _ är en räv,
$S\_$: _ skrattar.

2G Översätt följande till en predikatlogisk sentens,
"Någon som läser logik är glad, men att alla som läser logik är glada gäller bara om ingen som inte läser logik är berömd."
Använd följande lexikon:
$B\_$: _ är berömd,
$G\_$: _ är glad,
$L\_$: _ läser logik.

2H Översätt sentenserna i följande slutledning till LMPL
(dvs Language of Monadic Predicate Logic):

"Om en elev i grupp 1 kör på kontrollskrivningen, så anser han/hon att den är för svår." (Premiss)
"Det finns elever som klarar och elever som kör på skrivningen." (Premiss)
"Några elever anser att skrivningen är för svår." (Slutsats)

Använd följande lexikon:
$G\_$: _ tillhör grupp 1,
$K\_$: _ klarar kontrollskrivningen,
$A\_$: _ anser att kontrollskrivningen är för svår.
(Domänen består av alla elever på en logikkurs).

Avgör, med (kort) motivering, om slutledningen är logiskt giltig eller ej.

I uppgifterna 2I - 2N skall förklaras varför tolkningen visar påståendet.

2I Konstruera en tolkning som visar att

$$\exists x\,(Px \,\&\, Qx),\ \exists x\,(Qx \,\&\, Rx) \nvDash \exists x\,(Px \,\&\, Rx).$$

2J Konstruera en tolkning som visar att

$$\forall x\,\exists y\,(Fx \rightarrow Gy),\ \exists x \sim Gx \nvDash \sim\forall x\,Fx.$$

2K Konstruera en tolkning som visar att

$$\exists x\,(\forall y\,Gy \rightarrow (A \vee Hx)) \nvDash \forall x\,(Gx \rightarrow \exists y\,(A \vee Hy)).$$

2L Konstruera en tolkning som visar att

$$\exists x\,(\forall y\,(A \,\&\, Fy) \rightarrow Kx) \nvDash \forall x\,((A \,\&\, Fx) \rightarrow \exists y\,Ky).$$

2M Konstruera en tolkning som visar att

$$\forall x\,(Fx \vee Gx) \nvDash \forall x\,\forall y\,(Fx \vee Gy).$$

2N Konstruera en tolkning som visar att

$$\exists x\,\exists y\,(Fx \,\&\, Gy) \nvDash \exists x\,(Fx \,\&\, Gx).$$

2O Konstruera en tolkning som gör alla följande sentenser sanna:

$$\forall x(F(x) \rightarrow G(x)), \quad \exists x F(x), \quad \exists x \sim G(x).$$

2P Vilka av följande sentenser är satisfierbara?

a) $\exists x\, Px \,\&\, \forall x\,(Px \rightarrow \sim Px)$

b) $\exists x\, Px \,\&\, \exists x\,(Px \rightarrow \sim Px)$

c) $\forall x\, Px \rightarrow \exists y \sim Py$

2Q Avgör med tablåmetoden om följande gäller. Om det inte gäller, använd tablån för att finna en tolkning som visar detta.

$$\sim\forall x\,(Gx \rightarrow A) \ \vDash\ \sim A \,\&\, \exists x\, Gx.$$

2R Visa med tablåmetoden att

$$\forall x\,(Fx \vee Gx),\ \sim\forall x\,(Fa \rightarrow Fx) \ \vDash\ \exists x\, Gx.$$

2S Lös uppgift 2I med tablåmetoden.

2T Lös uppgift 2K med tablåmetoden.

2U Visa med tablåmetoden att sentenserna $\forall x\,\forall y\,(Px \rightarrow Qy)$ och $\exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Qx$ är logiskt ekvivalenta.

2V Visa med naturlig deduktion (**utan** SI-regler)

$$\forall x\,(Fx \rightarrow Kx),\ \sim\exists x\, Kx \ \vdash\ \sim\exists x\, Fx.$$

Om du använder någon av de kvantifikatorregler som medför särskilda villkor, ange tydligt vad villkoren säger i ditt fall.

2W Visa med naturlig deduktion att

$$\exists x\, Fx,\ \forall x\,\exists y\,(Fx \rightarrow Gy) \ \vdash\ \exists x\, Gx.$$

2X Visa med naturlig deduktion att sentenserna $\forall x\,\forall y\,(Px \rightarrow Qy)$ och $\exists x\, Px \rightarrow \forall x\, Qx$ är logiskt ekvivalenta.

2Y Visa med naturlig deduktion **utan** SI-regler att

$$\exists x\,\forall y\,(Fy \rightarrow Gx),\ \forall x \sim Gx \ \vdash\ \forall x \sim Fx.$$

2Z Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\,(Px \rightarrow Qx) \ \vdash\ \exists x \sim Px \vee \forall x\, Qx.$$

2Å Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$A \rightarrow \exists x\, Fx \ \vdash\ \exists x\,(A \rightarrow Fx).$$

2Ä Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\, Fx \rightarrow \exists x\, Gx \ \vdash\ \exists x\,(Fx \rightarrow Gx).$$

2Ö Visa med naturlig deduktion (SI-regler från formelbladet tillåtna)

$$\forall x\,\exists y\,(Fx \rightarrow Gy) \ \vdash\ \exists y\,\forall x\,(Fx \rightarrow Gy).$$

Uppgifter till Modul 3.

I uppgifterna 3A och 3B nedan får läsaren själv bestämma domän och lexikon.

3A Översätt till predikatlogiska sentenser:

a) "Alla känner apan, men apan känner ingen".

b) "Alla katter utom Gustaf är vita".

3B Översätt till predikatlogiska sentenser:

a) "Om någon annan flicka älskar Romeo, så blir Julia svartsjuk."

b) "Om någon annan flicka älskar Romeo, så blir Julia svartsjuk på henne."

3C Betrakta en tolkning där universum (domänen) är en mängd av människor, Rx betyder att x är rödhårig och Kxy betyder att x känner y.
Ge en predikatlogisk sentens som betyder
"Alla känner någon som är rödhårig, men ingen som alla känner är rödhårig".

3D Betrakta domänen av alla teknologer och alla tentor, samt följande lexikon:

$$\begin{array}{rl} I\_ : & \_ \text{ är en teknolog} \\ L\_ : & \_ \text{ är en logiktenta} \\ S\_,\_ : & \_ \text{ skriver } \_ \\ K\_,\_ : & \_ \text{ klarar } \_ \end{array}$$

Översätt till predikatlogiska sentenser:

a) "Ingen logiktenta klaras av alla teknologer som skriver den."

b) "Varje logiktenta klaras av någon teknolog".

3E Betrakta domänen av alla naturliga tal, samt följande lexikon:

$$\begin{array}{rl} Sxy : & x \text{ är större än } y \\ Px : & x \text{ är ett primtal} \end{array}$$

Översätt till en predikatlogisk sentens: "Det finns inget största primtal".

3F Översätt följande till en predikatlogiska sentenser:

a) "Det finns (minst) en människa som gillar alla hundar som gillar minst två människor."

b) "Alla hundar gillar (minst) en människa som gillar minst två hundar."
(Olika hundar kan gilla olika människor.)

Använd följande lexikon:
Mx : Ref(x) är en människa,
Hx : Ref(x) är en hund,
Gxy : Ref(x) gillar Ref(y).

3G Betrakta det predikatlogiska språket med tre individkonstanter: a, b, c, två enställiga predikat K, N och ett tvåställigt predikat T.
Vi har en tolkning där domänen består av alla invånare på Knarrön, Ref(a) är Abel, Ref(b) är Bebel, Ref(c) är Cebel,
'Kx' tolkas som "Ref(x) är kung", 'Nx' tolkas som "Ref(x) är narr" och 'Txy' tolkas som "Ref(x) tycker om Ref(y)".
Vi vet: 1) var och en på Knarrön är precis endera av kung och narr,
2) Abel är kung och tycker inte om någon kung och
3) Bebel tycker om Cebel som tycker om Abel som tycker om Bebel.
Uttryck 1) - 3) i predikatlogiska sentenser och avgör (informellt resonemang räcker) om vi vet tillräckligt för att avgöra om följande sentens är sann i tolkningen. Om vi gör det, är den sann eller falsk?

$$\exists x\,(Nx\ \&\ \exists y\,(Ky\ \&\ Txy))$$

3H Betrakta det predikatlogiska språket med en individkonstant h, två enställiga predikat F, K och ett tvåställigt predikat S.
Vi har en tolkning där domänen består av djur, Ref(h) är Hippo,
'Fx' tolkas som "Ref(x) är flodhäst", 'Kx' tolkas som "Ref(x) är krokodil" och 'Sxy' tolkas som "Ref(x) ser Ref(y)".
Vi vet: 1) ingen är både flodhäst och krokodil,
2) alla ses av någon och
3) Hippo är en flodhäst som inte ses av någon flodhäst.
Uttryck 1) - 3) i predikatlogiska sentenser och avgör (informellt resonemang räcker) om vi vet tillräckligt för att avgöra om följande sentens är sann i tolkningen. Om vi gör det, är den sann eller falsk?

$$\exists x\,\exists y\,(Kx\ \&\ Fy\ \&\ Sxy)$$

3I Visa att $\quad \forall x\,\exists y\,Fxy \not\models \exists y\,\forall x\,Fxy.$

3J Finn en modell för

$$\{\exists x\,\forall y\,Fxy,\ \forall x\,\forall y\,(Fxy \rightarrow Fyx),\ \exists x\,\exists y\ \sim Fxy\},$$

dvs finn en tolkning som gör alla dessa sentenser sanna.

3K Visa att

$$\forall x\,\exists y\,Fxy,\ \forall x\,\exists y\,Gyx,\ \forall x\,\forall y\,((Fxy \vee Gxy) \rightarrow x \neq y) \not\models \exists x\,\exists y\,(Fxy\ \&\ Gxy).$$

$x \neq y$ är som vanligt en beteckning för $\sim x = y$.

3L Visa att $\quad \forall x\,\exists y\,Fyx,\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Fxy\ \&\ Fxz) \rightarrow y = z) \not\models \forall x\,\exists y\,Fxy.$

3M Finn en modell (dvs en tolkning som gör alla sanna) för sentensmängden

$$\{\ \forall x\,\exists y\,Sxy,\ \exists x \sim Fx,\ \forall x\,(\exists y\,Syx \rightarrow Fx),\ \forall x\,(\forall y\,Syx \rightarrow \sim Fx)\ \}$$

3N Visa att $\exists x\, \forall y\, Sxy,\ \forall x\, \exists y\, \exists z\, (Sxy\ \&\ Sxz\ \&\ y \neq z) \nvDash \exists y \forall x\, Sxy$

3O Finn en modell för nedanstående mängd av sentenser (dvs en tolkning som gör alla sanna), med så få individer i domänen som möjligt:

$$\{\ \forall x\, \exists y\, \exists z\, (y \neq z\ \&\ Rxy\ \&\ Rxz),\quad \forall x\, \forall y\, (Rxy \to Ryx),\quad \forall x\, \forall y\, \forall z\, ((Rxy\ \&\ Ryz) \to\ \sim Rxz)\ \}$$

3P Avgör om följande gäller:

$$\forall x\, \forall y\, (Rxy \to Syx),\ \exists x\, \forall y\, Rxy\ \vDash\ \forall y\, \exists x\, Sxy.$$

Motivera ditt svar noga.

3Q Översätt följande påstående till predikatlogiskt språk:
(inför själv en lämplig predikatsymbol; domän behöver ej specificeras.)
"Ingen känner precis dem som inte känner sig själv".
("precis dem som ..." betyder "dem som ... och endast dessa").

Visa med tablåmetoden att påståendet är logiskt giltigt.

3R Visa med naturlig deduktion att

$$\forall x\, \forall y\, (Fxy \to \sim Fyx)\ \vdash\ \forall x\, \forall y\, (Fxy \to x \neq y).$$

$x \neq y$ är som vanligt en beteckning för $\sim x = y$.

3S Visa med naturlig deduktion att

$$\exists x\, (Fx\ \&\ \forall y\, (Gy \to Hxy))\ \vdash\ \forall x\, (Gx \to \exists y\, (Fy\ \&\ Hyx)).$$

3T Visa med naturlig deduktion att

$$\exists x\, Pxx,\ \forall x\, \exists y \sim Pxy\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, x \neq y.$$

3U Visa med naturlig deduktion (utan SI-regler):

$$\exists x\, \forall y\, Qxy,\ \forall x\, \exists y\, (Pxy \vee\ \sim Qxy)\ \vdash\ \exists x\, \exists y\, Pxy.$$

3V Visa med naturlig deduktion **utan** SI-regler att

$$\exists x\, ((B \to Gx) \to A),\ \exists x\, \forall y\, (Fxy \to \sim B),\ \exists x\, \forall y\, (B \to Fyx)\ \vdash\ A\ \&\sim B.$$

3W Visa med naturlig deduktion (**utan** SI-regler)

$$\exists x\, Rax,\ \forall x\, (\exists y\, Ryx \to\ \sim Gx)\ \vdash\ Ga \to \exists x\, a \neq x.$$

Om du använder någon av de kvantifikatorregler (**inte** SI-regler) som medför särskilda villkor, ange tydligt vad villkoren säger i ditt fall.

3X Visa med naturlig deduktion (**utan** SI-regler)

$$\forall x\,(\exists y \sim Rxy \rightarrow \exists z\, Rxz),\ \exists x\,\exists y \sim Rxy \ \vdash\ \exists x\,\exists y\, x \neq y.$$

Om du använder någon av de kvantifikatorregler som medför särskilda villkor, ange tydligt vad villkoren säger i ditt fall.

3Y Visa med naturlig deduktion

$$\forall x\,\exists y\, Rxy,\ \forall x\,\forall y\,(\exists z\,(Rxz \,\&\, Rzy) \rightarrow y = x)\ \vdash\ \forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx).$$

3Z Visa med naturlig deduktion

$$\exists x\, Px,\ \forall x\,\forall y\,((Px \,\&\, Py) \rightarrow x = y)\ \vdash\ \exists x\,\forall y\,(Py \leftrightarrow x = y).$$

3Å Visa med naturlig deduktion (SI-regler får användas)

$$\forall x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow Ryx),\ \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy \,\&\, Ryz) \rightarrow Rxz),$$
$$\exists x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy \,\&\, Rxz) \rightarrow y = z)\ \vdash\ \exists x\,\forall y\,(Rxy \rightarrow x = y).$$

Uppgifter till Modul 4.

4A **a)** Ange predikatlogiska sentenser som uttrycker att (tolkningen av) det tvåställiga predikatet R är **reflexiv**, **symmetrisk** respektive **transitiv**.
b) Visa att R reflexiv, R symmetrisk $\not\models$ R transitiv.

4B Betrakta den binära relationen R, definierad på domänen av alla människor enligt: Rab betyder att a och b har någon gemensam vän, dvs att det finns en person c som varken är a eller b och som är vän till a och till b.
a) Är relationen R reflexiv?
b) Är relationen R symmetrisk?
c) Är relationen R transitiv?
Det skall klart framgå av dina svar vad det innebär att en relation är reflexiv, symmetrisk respektive transitiv.

4C Betrakta den binära relationen R, definierad på mängden av alla bilar: Rab betyder att minst en av följande gäller 1. a har krockat med b, 2. a har krockat med en bil som har krockat med b, 3. a har krockat med en bil som har krockat med en bil som har krockat med b, etc (godtyckligt många led).
a) Är relationen R reflexiv?
b) Är relationen R symmetrisk?
c) Är relationen R transitiv?
Det skall klart framgå av dina svar vad det innebär att en relation är reflexiv, symmetrisk respektive transitiv.

4D Visa att en relation R med egenskapen $\forall x\,\forall y\,\exists z\,(Rxz\;\&\;Rzy)$ inte behöver vara reflexiv. Kan den vara irreflexiv (dvs $\forall x\ {\sim}Rxx$)?

4E Finn en tolkning som visar att

$$\forall x\,Pxx\,,\ \ \forall x\,\forall y\,\forall z\,((Pxy\;\&\;Pyz)\rightarrow Pxz)\,,\ \ \forall x\,\forall y\,\exists z\,(Pxz\;\&\;Pyz)$$
$$\not\models$$
$$\forall y\,\forall z\,(Pyz\ \vee\ Pzy).$$

4F Måste en relation R som uppfyller $\forall x\,Rxx\;\&\;\forall x\,\forall y\,\forall z\,((Rxy\;\&\;Ryz)\rightarrow Rzx)$ vara en ekvivalensrelation? Lösningen får vara informell, men den skall vara klar och väl motiverad och det skall klart framgå vad det innebär att vara en ekvivalensrelation.

4G Definiera relationerna R och S på mängden av alla satslogiska sentenser:
Rpq gäller om och endast om $\models\ p \vee {\sim}q$.
Spq gäller om och endast om $p\ \vee\ q$ är satisfierbar.
Avgör för var och en av R och S om den är reflexiv, symmetrisk och/eller transitiv. Det ska framgå av lösningen vad dessa egenskaper innebär.

4H Låt R vara en **transitiv**, **seriell** relation på en **ändlig domän**. Visa att $\exists x\, Rxx$ (dvs att R **inte** är **irreflexiv**). Relationen R kallas seriell om den uppfyller $\forall x\, \exists y\, Rxy$.

4I Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\ S(x) = S(0) + x$. Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

4J Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\ 0 * x = 0$. Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

4K Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, (x \neq 0 \rightarrow \exists y\, (x = S(y)))$. Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

4L Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, S(0) * x = x$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

4M Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, S(x) \neq x$. Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

4N Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + y) + z = x + (y + z)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Ledning: Visa för godtyckliga a, b att $\forall z\, (a + b) + z = a + (b + z)$.

4O Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (x + z = y + z \rightarrow x = y)$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.
Ledning: Visa för godtyckliga a, b att $\forall z\, (a + z = b + z \rightarrow a = b)$.

4P Visa att det följer ur Peanos axiom att $\forall x\, \forall y\, (x + y = 0 \rightarrow (x = 0\ \&\ y = 0))$.
Resonemanget får vara informellt, men det skall vara klart och bindande.

Ledningar till Modul 1.

1A Vad är det yttersta konnektivet? Osv

1B "p är ett nödvändigt villkor för q" översätts med $q \rightarrow p$, ty det enda fall som gör den falsk är att q är sann och p är falsk.
På samma sätt ser man att "p bara om q" blir $p \rightarrow q$.

1G Kan C vara kung?

1H Utgå från att B är antingen kung eller narr (två fall, alltså).

1I Kan Alef vara kung?

1J Vad vet vi om antalet kungar (bland A, B och C) efter att ha hört A:s påstående?

1K Enklast är här att använda sanningsvärdestabell. (Tablåmetoden ger ett yvigt träd).

1L Anta slutsatsen falsk, se vad det leder till osv.

1M Tänk efter vad $p \models q \vee r$ och $\sim q \models p \rightarrow r$ egentligen betyder.

1N Finns det sentenser p, q, r sådana att $r \,\&\sim p$ är sann i alla tolkningar som gör q sann, samtidigt som det finns tolkningar med $p \leftrightarrow q$ sann och $\sim r$ falsk?

1V Strategi: Antag A och härled en motsägelse.

1W Strategi: Antag A och härled B (genom att anta $\sim B$ och härleda en motsägelse).

1X Strategi: Antag C och härled $\sim A$ (genom att anta A och härleda en motsägelse). Använd premiss nr 1 medelst $\rightarrow E$ och $\vee E$, eller använd lämplig SI-regel. Osv.

1Y Strategi: Antag C och härled $\sim B$ (genom att anta B och härleda en motsägelse). Använd premiss nr 2 medelst $\vee E$, eller använd lämplig SI-regel. Osv.

1Z Antag B. Sedan behöver vi för omväxlings skull inte göra ett indirekt bevis (dvs anta $\sim(A \vee C)$).

1Å Utan SI-regler får vi anta $\sim(\sim A \vee C)$, och härleda upprepade motsägelser (anta A, använd $\vee E$, osv.) Betydligt lättare blir det om vi härleder $A \rightarrow C$ och använder SI(Imp), med användning av SI(DS) på vägen.

1Ä Observera att $\sim(A \vee B) \vee A$ och $(A \vee B) \rightarrow A$ kan fås från varandra enligt SI(Imp).

1Ö Detta går att göra "rakt fram". Vi behöver härleda både A och B. Börja med att härleda $A \rightarrow B$ beroende enbart på premissen.

Ledningar till Modul 2.

Observera typexemplet:

"Det finns någon rutten tomat":	$\exists x\,(Tx \,\&\, Rx)$
"Alla tomater är ruttna":	$\forall x\,(Tx \rightarrow Rx)$

2E "För varje katt finns minst en råtta som dansar på bordet om katten är borta."
dvs
"För alla x: om x är en katt så finns en råtta som dansar på bordet om x är borta."
dvs
"För alla x: om x är en katt så finns y: y är en råtta och y dansar på bordet om x är borta."

2F "Det finns (minst) ett får så att alla rävar skrattar om fåret bräker."
dvs
"Det finns x: x är ett får och alla rävar skrattar om x bräker."
dvs
"Det finns x: x är ett får och för alla y: om y är en räv skrattar y om x bräker."

2U Visa att $\forall x \forall y\,(Px \rightarrow Qy) \leftrightarrow (\exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Qx)$ är logiskt giltig.

2V Idé: Antag motsatsen, att det finns a så att Fa. Första premissen ger $Fa \rightarrow Ka$, så Ka och därmed $\exists x\,Kx$, vilket motsäger andra premissen.

2W Utgå från premiss nr 1.

2X Visa först: $\forall x \forall y\,(Px \rightarrow Qy) \vdash \exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Qx$.
Idé: Prova rakt upplägg: anta $\exists x\,Px$, använd $\exists$-elimination, etc.
Visa sedan: $\exists x\,Px \rightarrow \forall x\,Qx \vdash \forall x \forall y\,(Px \rightarrow Qy)$.
Idé: Försök härleda $Pa \rightarrow Qb$ beroende på rader där varken a eller b förekommer. Sedan $\forall$I.

2Y Strategi: Antag Fa, härled via motsägelse $\sim Fa$ på en rad som inte beror på någon rad där a förekommer, samt använd $\forall$I.

2Z Indirekt bevis (slutsatsen är en disjunktion). Man kan med fördel anta $\sim \exists x \sim Px \;\&\; \sim \forall x\, Qx$, få negationen av detta via en motsägelse och använda en SI(DeM)-regel. Härvid kan SI(QS)-reglerna komma till god användning.

2Å Idé: **Om** A så enligt premissen $\exists x\, Fx$, så Fa för något a. Då gäller $A \to Fa$ för detta a. **Annars** $\sim A$ så $A \to Fa$ för godtyckligt a. I båda fallen fås $\exists x\,(A \to Fx)$. SI(LEM) kan användas.

2Ä Idé: Om Fa är falsk för något a, gäller $Fa \to Ga$. Annars är $\forall x\, Fx$ sann, och enligt premissen finns a med Ga sann. Då gäller också $Fa \to Ga$. Tvåfallsresonemang antyder indirekt bevis (anta slutsatsens negation osv). Alternativt kan premissen transformeras med SI(Imp) och $\vee$E användas.

2Ö Idé: **Om** Fa för något a, ger premissen (med $x = a$) Gb för något b, detta ger slutsatsen (med $y = b$), **annars** gäller $\sim Fa$ för alla a och slutsatsen fås med godtyckligt y. Tvåfallsresonemang, så vi försöker med ett indirekt bevis.

Ledningar till Modul 3.

3B **a)** r: Romeo, j: Julia, Fx: x är en flicka, Axy: x älskar y, Sx: x blir svartsjuk. "Om det finns x, sådant att x är en annan flicka (än Julia) och x älskar Romeo, så blir Julia svartsjuk."

b) Lexikon som i **a)**, men byt Sx mot Sxy: x blir svartsjuk på y.
Obs att "någon" här inte slentrianmässigt skall översättas medelst $\exists$, utan det menas att för varje annan flicka som älskar Romeo, så blir Julia svartsjuk på henne.

3C Vad är det yttersta konnektivet?

3E Yttersta konnektivet är "icke".
"x är största primtal" $\Leftrightarrow$ "x är primtal och är $\geq$ alla primtal".

3I - P Det kan ofta vara bra att rita riktade grafer där tvåställiga relationer (dvs tolkningar av tvåställiga predikat) illustreras med pilar.

3K Använd t.ex. heldragna pilar för F och streckade pilar för G.

3N Prova att i stället för grafer betrakta tolkningar av S som $n \times n$ - matriser, där n är antalet element i domänen: matrisen har sanningsvärdet för Sxy i position xy.

3O Bygg upp en riktad graf. Visa att den inte kan ha några loopar (pilar från ett hörn till sig själv), konstatera att alla pilar måste vara dubbelriktade, och jobba vidare med hjälp av sentens 1 och 3. Visa att en modell måste ha ≥ 4 element i domänen.

3R Idé: om $a = b$, så innebär $Fab \to \sim Fba$ att $Faa \to \sim Faa$, dvs att Faa, och därmed Fab, är falsk. Om Fab är sann måste alltså $a = b$ vara falsk.

3T - U Strategi: Använd $\exists$E och $\forall$E på rätt sätt tills man får kvantifikatorfria sentenser, använd satslogiska regler och klä på med $\exists$I.

3W Idé: Enligt premiss 1 "går (minst) en pil" från α, till β säg (ev. är $\beta = \alpha$), så Rab gäller. Enligt premiss 2 gäller då $\sim Gb$. Om Ga gäller kan alltså inte $a = b$.

3X Idé: Enligt premiss 2 gäller $\sim Rab$ för några a, b. Enligt premiss 1 gäller då Rac för något c, samma a. Då är $b \neq c$.

3Y Idé: Anta Rab och härled Rba beroende endast på detta antagande och premisserna. Använd den första premissen för $x = b$, antag Rbc (för $\exists$E), och härled sedan $c = a$ med hjälp av den andra premissen, osv

3Z Idé: Premisserna betyder "det finns minst ett P" respektive "det finns högst ett P", medan slutsatsen betyder "det finns precis ett P". Det x som ska existera enligt slutsatsen är förstås ett x som existerar enligt första premissen (dvs som benämns i ett motsvarande antagande för $\exists$-elimination).

3Å Idé: De två första premisserna ger Raa om Rab för något b. Den tredje ger, för något a, Rab för högst ett b.

Ledningar till Modul 4.

4A Går det att ha en domän med högst två element i en tolkning som visar **b**)?

4E Man ser att det inte går med en tolkning där domänen har mindre än tre element. En "naturlig" variant fås med domänen = {naturliga talen} och P tolkad som någon "naturlig" relation (inte $<$ eller $>$ dock).

4F Undersök först om R måste vara symmetrisk.

4G Blanda inte ihop begreppen. $\models\ p \vee \sim q$ betyder att $p \vee \sim q$ är sann i varje tolkning (dvs är en tautologi). $p \vee q$ satisfierbar betyder att $p \vee q$ är sann i minst en tolkning. T.ex. R symmetrisk betyder att $Rpq \Rightarrow Rqp$ för varje val av p, q, dvs $p \vee \sim q$ tautologi $\Rightarrow$ $q \vee \sim p$ tautologi. Gäller detta för varje val av p, q?

4H Visa att det finns någon följd $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots$ i domänen D, sådan att $Ra_i a_{i+1}$ gäller för $i = 0, 1, 2, \ldots$, och därmed att $Ra_j a_k$ gäller om $j < k$. Som D är ändlig, så kan inte alla α_i vara olika.

4I Låt ϕx vara formeln $S(x) = S(0)+x$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$, dvs $\forall x\, S(x) = S(0)+x$. Använd induktion.

4K Låt ϕx vara formeln $x \neq 0 \rightarrow \exists y\, (x = S(y))$. Vi skall visa $\forall x\, \phi x$. Lägg märke till att i induktionssteget: $\phi a \Rightarrow \phi S(a)$, behöver induktionsantagandet ϕa inte användas när man visar $\phi S(a)$.

4P Visa att för godtyckligt a gäller $\forall y\, (a + y = 0 \rightarrow (a = 0\ \&\ y = 0))$. Låt ϕy vara formeln $a + y = 0 \rightarrow (a = 0\ \&\ y = 0)$ och visa $\forall y\, \phi y$.