MaHi : Kägelsnitt. Räkneuppgifter

Nedan är talen $a, b, c, ..., p, q$ positiva parametrar,
medan variablerna betecknas med bokstäver såsom u, v, w, x, y, z .
Låt punkten P nedan i uppgifterna 5. – 8. ha koordinaterna $P : (x_0, y_0)$.

1. Visa att cirkelns (gammalgrekiska) symptom $y^2 = x\,(\,2a - x\,)$ med variabelbytet $x - a = u$ övergår till cirkelns ekvation på standardform $u^2 + y^2 = a^2$.

2. Visa att ellipsens symptom $y^2 = p\,x\,(\,2a - x\,)$ med variabelbytet $x = u + a$ kan stöpas om till ellipsens ekvation på standardform $\frac{u^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, om vi inför parametern b med $b^2 = p\,a^2$.

3. Visa att hyperbelns symptom $y^2 = p\,x\,(\,2a + x\,)$ med variabelsubstitutionen $x = u - a$ kan omformas till hyperbelns ekvation på standardformen $\frac{u^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, om vi skriver $b^2 = p\,a^2$.

---

4. Visa att hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

har de två asymptoterna $\frac{x}{a} = \pm\frac{y}{b}$.

5. Visa att tangenten i punkten P till parabeln $y^2 = p\,x$ har ekvation $2\,y\,y_0 = p\,x + y_0^2 = p\,(\,x + x_0\,)$. Obs. Punkten P måste förstås ligga **på** parabelkurvan.

6. Visa att tangenten i föregående uppgift skär x-axeln i en punkt som ligger lika långt från parabelns “spets” (eller “vändpunkt”) som punktens P:s “fotpunkt” $(\,x_0, 0\,)$ på symmetriaxeln $y = 0$.

7. Visa att tangenten i punkten P till ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

har ekvation $\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1$. Obs. Eftersom punkten P antages ligga **på** ellipsen, måste den uppfylla sambandet $\frac{{x_0}^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

8. Visa att tangenten i punkten P till hyperbeln i uppgift 4. har ekvation
$\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$.

9. En hyperbel kallas rätvinklig om dess asymptoter skär varandra under rät vinkel. Visa att hyperbeln i uppgift 4. är rätvinklig precis då $a = b$.

10. Visa att om hyperbeln i uppgift 4. är rätvinklig, så kan den skrivas på en mycket enklare form med de nya rätvinkliga koordinaterna $z = x - y$, $w = x + y$.

11. Visa att alla parablar har samma form: En parabel $y^2 = p\,x$ kan transformeras till en parabel med ekvationen $v^2 = qu$ i ett annat koordinatsystem (u, v) , om vi väljer en lämplig förstoringsfaktor/förminskningsfaktor mellan koordinatsystemen genom formlerna $x = k\,u$, $y = k\,v$.

12. Parabolisk spegel. Använd uppgift 5. för att visa att om en stråle kommer in från höger längs linjen $y = p/2$ parallell med y-axeln, så reflekteras den i punkten $R : (p/4, p/2)$ till att gå rakt ner genom punkten $F : (p/4, 0)$ till punkten $Q : (p/4, -p/2)$, där den reflekteras till att gå ut rakt till höger längs linjen $y = -p/2$. Punkten F kallas parabelns brännpunkt eller focus/fokus. Parametern p kan alltså tolkas som parabelns "bredd" (vinkelrätt mot symmetriaxeln $y = 0$) genom fokus: $p =$ avståndet mellan R och Q .

Brännpunkter och excentricitet.

Parabeln $y^2 = px$ har brännpunkt med koordinaterna $F : (p/4, 0)$. Parabeln har excentriciteten $e = 1$.

Ellipsen

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

med halva storaxeln a och halva lillaxeln b , där $a \geq b > 0$ har excentricitet $e = c/a$, där $2c$ är avståndets mellan ellipsens brännpunkter (längs storaxeln) och $c^2 = a^2 - b^2$. Således blir $e = \sqrt{1 - b^2/a^2}$, och $0 \leq e < 1$.
En ellips med excentricitet $e = 0$ är en cirkel.

Hyperbeln

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

har excentricitet $e = c/a$, där $c^2 = a^2 + b^2$. Således blir $e = \sqrt{1 + b^2/a^2} > 1$. Excentriciteten e kan bli hur stor som helst. Avståndet mellan hyperbelns brännpunkter är $2c$.

På wikipedia finns många vackra bilder, se t ex

https://en.wikipedia.org/wiki/Apollonius of Perga

https://en.wikipedia.org/wiki/Conic section

https://en.wikipedia.org/wiki/Ellipse

https://en.wikipedia.org/wiki/Parabola

https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbola