Hemuppgifter SF1603 FlerVariabel

31 jan 2014

Analytiska funktioner kan vi med fördel öva partiell differentiering på.
Varje komplexvärd funktion $f(z) = f(x + \mathrm{i}y)$ kan skrivas om på formen $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$, där funktionerna u och v är reellvärda.
Om funktionen $f(z)$ är ett polynom skriver vi $p(z)$ istället.
Ett nödvändigt villkor för att funktionen f skall vara *analytisk* är
Cauchy–Riemanns differentialekvationer (CR's DE, eller kort bara CR)

$$u_x = v_y \qquad \text{och} \qquad u_y = -\, v_x \ .$$

Här skriver vi enkelhets skull

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad .$$

Kontrollera om CR gäller i följande fall:

1. $p(z) = (\, x + \mathrm{i}y\,)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy = u + \mathrm{i}v\,.$

2. $p(z) = (\, x + \mathrm{i}y)^3 = \cdots = u + \mathrm{i}v\,.$

3. $p(x + \mathrm{i}y) = (\, x + \mathrm{i}y)^4 = \cdots = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + \mathrm{i}4(x^3y - xy^3)\ .$

4. $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(\, x + \mathrm{i}y\,)} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \cdots$

5. $f(z) = 1/z^2 = 1/(\, x + \mathrm{i}y)^2 = \cdots$

6. $f(z) = \exp(\,-\,z^2) = \mathrm{e}^{\,-z^2} = \exp(\,y^2 - x^2 - \mathrm{i}2xy\,) = \{\text{minns Eulers formler}\} = \cdots$

7. $f(z) = \sin(z) = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \sin(\mathrm{i}y) = \cdots = u + \mathrm{i}v$, där $\sin(\mathrm{i}y)$ och $\cos(\mathrm{i}y)$ också beräknas medelst Eulers formler (jämför nedan vid Obs). Här passar det att bruka sinus hyperbolicus och cosinus hyperbolicus.

8. Principalgrenen Log av den komplexvärda logarithmen definieras för det komplexa talet $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, där här $-\pi < \theta < \pi$, av

$$\mathrm{Log}\, z = \mathrm{Log}\,(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \log r + \mathrm{i}\theta\,,$$

där log betyder ln, och om nu $x > 0$, så har vi $r^2 = x^2 + y^2$ och $\tan\theta = y/x$, varav vi lätt kan beräkna funktioner(na) u och v i höger halvplan, sådana att $\mathrm{Log}\, z = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ där. Uppfyller de CR?

10*. Hur kontrollerar vi enklast att även $\cos z$ uppfyller CR, om vi vet att sinus gör det?

Obs. $\cos(\mathrm{i}y) = \cdots = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{\,-\,\mathrm{i}\mathrm{i}y}}{2} = \cdots$

11. För att öva på **andraderivator** anbefalles **Laplaces ekvation** $u_{xx} + u_{yy} = 0$, som både u och v från ovan bör uppfylla. Här är $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ och $u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.

Hemuppgifter SF1603 FlerVariabel 1 febr 2014

1. Låt en av de tre koordinaterna (x eller y eller z) gå mot oändligheten **längs** en hyperboloid eller paraboloid i rummet (se gröna P-B sid. 30).
a) Kan Du bevisa att **var och en** av de övriga två koordinaterna (längs samma buktiga yta) också måste gå mot oändligheten?
b) Om inte, vad är det då man kan bevisa "att" måste gå mot oändligheten?

2. Låt området Ω vara en tjock variant av den stora bokstaven Z *utan* serifferna eller klackarna (de två små tvärslåarna i ändarna på detta typsnitt/denna font), så att var och en av de **tre** länkarna eller benen i denna VERSAL har positiv bredd, varav följer att området Ω har positiv area. Antag att det mellersta benet bildar en halv rät vinkel med vart och ett av de övriga två benen. Låt nu f vara en funktion, definerad överallt i hela området Ω. Vi skriver här $\partial f/\partial x \; = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ osv.

a) Om $\partial f/\partial x = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då vara *helt* oberoende av variabeln x ?

b) Om $\partial f/\partial y = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då vara *helt* oberoende av variabeln y ?

c) Om $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då kunna skrivas som en funktion av den enda variabeln $u = x + y$ **eller** som en funktion av den enda variabeln $v = y - x$?

d) Om $\partial f/\partial x - \partial f/\partial y = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då kunna skrivas som en funktion av den enda variabeln $u = x + y$ **eller** som en funktion av den enda variabeln $v = y - x$?

2. Om både $\partial f/\partial x = 0$ och $\partial f/\partial y = 0$ överallt i hela planet $\mathbf{R}^2$, måste då f vara konstant?

3*. (Jämför blad 31 jan 2014.) Om två reellvärda funktioner $u(x,y)$ och $v(x,y)$ uppfyller CR: $u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$ *överallt* i hela planet $\mathbf{R}^2$, måste då funktionerna u och v vara kontinuerliga?
Tips. Origo är onekligen en speciell punkt för funktionerna u och v, om

$$u + \mathrm{i}v = \exp(-z^{(-4)}) = \mathrm{e}^{-z^{(-4)}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{z^4}\right)} \qquad \text{då} \quad (x,y) \neq (0,0),$$

och $(u,v) = (0,0)$ då $(x,y) = (0,0)$.
Man kan speciellt undersöka hur funktionen u uppför sig nära origo på de åtta olika strålarna där z^4 är reell.