Hemuppgifter SF1603 FlerVariabel 17 febr 2014

DE betyder differentialekvation.

1 a). Repetera eller kontrollera transformationsformlerna åt båda hållen mellan kartesiska koordinater (x, y) och polära koordinater (r, θ) i planet.

b) Repetera eller kontrollera transformationsformlerna för partiella derivator av w mellan kartesiska koordinater (x, y) och polära koordinater (r, θ) i planet, där $u = f(x, y) = g(r, \theta)$.

c) Visa eller kontrollera att $x f_x' + y f_y' = r g_r'$ och att $x f_y' - y f_x' = r g_\theta'$.

d) Visa att den allmänna lösningen till DE $x f_y' - y f_x' = 0$ kan skrivas på formen $f(x, y) = h(x^2 + y^2)$, där h är en godtycklig (deriverbar) funktion av **en** variabel.

e) Visa att den allmänna lösningen till DE $x f_x' + y f_y' = 0$ kan skrivas på formen $f(x, y) = k(y/x)$, där k är en godtycklig (deriverbar) funktion av **en** variabel.

f) Visa att den allmänna lösningen till DE $x f_x' + y f_y' = 0$ kan skrivas på formen $f(x, y) = \ell(x/y)$, där ℓ är en godtycklig (deriverbar) funktion av **en** variabel.

g) Visa att den allmänna lösningen till DE $x f_x' + y f_y' = 0$ kan skrivas på formen $f(x, y) = m(\theta)$, där m är en godtycklig (deriverbar) funktion av **en** variabel.

2 a). Här används nu koordinater $u = x^2 - y^2$ och $v = 2xy$.
Låt funktionen $T = f(x, y) = h(u, v)$. Visa att $x f_x' + y f_y' = 2(u h_u' + v h_v')$.

b) Visa att $x f_x' - y f_y' = 2(x^2 + y^2) h_u'$.

c) Visa att $y f_x' + x f_y' = 2(x^2 + y^2) h_v'$.

d) Visa att den allmänna lösningen till DE $x f_x' - y f_y' = 0$ kan skrivas på formen $f(x, y) = n(xy)$, där n är en godtycklig (deriverbar) funktion av **en** variabel.

e) Visa att den allmänna lösningen till DE $y f_x' + x f_y' = 0$ kan skrivas på formen $f(x, y) = q(x^2 - y^2)$, där q är en godtycklig (deriverbar) funktion av **en** variabel.

f) Skissa nivåkurvorna för en sådan funktion $n(xy)$ i xy-planet.

g) Skissa nivåkurvorna för en sådan funktion $q(x^2 - y^2)$ i xy-planet.

h) Skissa i uv-planet nivåkurvorna $x = C$, där C t ex antager värdena $\pm 2, \pm 1, 0$.

i) Skissa i uv-planet nivåkurvorna $y = B$, där B t ex antager värdena $\pm 2, \pm 1, 0$.

j) Om vi skriver $z = x + \mathrm{i}y$ och $w = u + \mathrm{i}v$, så blir $w = z^2$. Kan detta samband kasta ljus över ovanstående?

k) Beräkna Jacobi-determinanten $J = u_x' v_y' - u_y' v_x'$.