

Hemuppgifter SF1603 FlerVariabel

19 febr 2014

DE betyder differentialekvation.

1. handlar om värmeledningsekvationen ("the heat equation", som vi förkortar HE nedan).

Låt tills vidare f beteckna en envariabelfunktion (funktion av en variabel) av klass C^2 och sätt $w(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} f\left(\frac{x^2}{t}\right)$. Här måste alltså tidskoordinaten t vara positiv.

a) Beräkna de partiella derivatorna $w_{xx} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$ och $w_t = \frac{\partial w}{\partial t}$ uttryckta i vanliga, ordinära derivator av f .

b) Om man nu ingående **jämför** dessa två (w_{xx} och w_t), så ser man strax att

om $f = f'' = \pm f'$ (TVÅ möjligheter!), **så** uppfyller w den enkla DE

(*) $w_t = \pm \text{const.} w_{xx}$, där const. står för en positiv konstant. Bestäm denna konstant.

c) Till vår HE vill vi ha en lösning $w(x, t)$ som **inte** växer obegränsat då tiden t går mot $+\infty$. Välj den funktion f från b) ovan som uppfyller detta villkor, skriv upp motsvarande funktion w och kontrollera nu att den verkligen uppfyller en HE av typ (*). Vilket tecken (plus eller minus) bör det stå i ekvation (*)?

2. Antag att f är en envariabelfunktion av klass C^1 , definierad på hela talaxeln (för alla reella tal). Vi definierar nu en ny funktion g av två variabler genom

$$g(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}, \quad x \neq y.$$

Funktionen g är alltså definierad för alla punkter (x, y) i det reella talplanet **utom** på den s k *diagonalen*, där $x = y$.

Kan Du utvidga domänen (definitionsområdet) för funktionen g , så att den blir kontinuerlig i *hela* talplanet, inklusive diagonalen $x = y$?

3. Här startar vi istället med en funktion F av två variabler, som är av klass C^1 i hela talplanet, och definierar en ny funktion G av två variabler genom

$$G(x, y) = \frac{F(x, y) - F(y, x)}{x - y}, \quad x \neq y.$$

Funktionen G är alltså definierad för alla punkter (x, y) i det reella talplanet **utom** på *diagonalen*, där $x = y$.

Kan Du utvidga domänen (definitionsområdet) för funktionen G , så att den blir kontinuerlig i *hela* talplanet, inklusive diagonalen $x = y$?