Hemuppgifter SF1603 FlerVariabel   1 febr 2014

1. Låt en av de tre koordinaterna (x eller y eller z) gå mot oändligheten **längs** en hyperboloid eller paraboloid i rummet (se gröna P-B sid. 30).
a) Kan Du bevisa att **var och en** av de övriga två koordinaterna (längs samma buktiga yta) också måste gå mot oändligheten?
b) Om inte, vad är det då man kan bevisa "att" måste gå mot oändligheten?

2. Låt området Ω vara en tjock variant av den stora bokstaven Z *utan* seriffern eller klackarna (de två små tvärslåarna i ändarna på detta typsnitt/denna font), så att var och en av de **tre** länkarna eller benen i denna VERSAL har positiv bredd, varav följer att området Ω har positiv area. Antag att det mellersta benet bildar en halv rät vinkel med vart och ett av de övriga två benen. Låt nu f vara en funktion, definerad överallt i hela området Ω. Vi skriver här $\partial f/\partial x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ osv.

a) Om $\partial f/\partial x = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då vara *helt* oberoende av variabeln x ?

b) Om $\partial f/\partial y = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då vara *helt* oberoende av variabeln y ?

c) Om $\partial f/\partial x + \partial f/\partial y = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då kunna skrivas som en funktion av den enda variabeln $u = x + y$ **eller** som en funktion av den enda variabeln $v = y - x$?

d) Om $\partial f/\partial x - \partial f/\partial y = 0$ överallt inuti området Ω, måste funktionen f då kunna skrivas som en funktion av den enda variabeln $u = x + y$ **eller** som en funktion av den enda variabeln $v = y - x$?

2. Om både $\partial f/\partial x = 0$ och $\partial f/\partial y = 0$ överallt i hela planet $\mathbf{R}^2$, måste då f vara konstant?

3*. (Jämför blad 31 jan 2014.) Om två reellvärda funktioner $u(x, y)$ och $v(x, y)$ uppfyller CR: $u_x = v_y$ och $u_y = -v_x$ *överallt* i hela planet $\mathbf{R}^2$, måste då funktionerna u och v vara kontinuerliga?
Tips. Origo är onekligen en speciell punkt för funktionerna u och v, om

$$u + \mathrm{i}v = \exp(-z^{(-4)}) = \mathrm{e}^{-z^{(-4)}} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{1}{z^4}\right)} \qquad \text{då} \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

och $(u, v) = (0, 0)$ då $(x, y) = (0, 0)$.
Man kan speciellt undersöka hur funktionen u uppför sig nära origo på de åtta olika strålarna där z^4 är reell.