Hemuppgifter SF1603 FlerVariabel 31 jan 2014

Analytiska funktioner kan vi med fördel öva partiell differentiering på.
Varje komplexvärd funktion $f(z) = f(x + \mathrm{i}y)$ kan skrivas om på formen $f(z) = u(x, y) + \mathrm{i}\, v(x, y)$, där funktionerna u och v är reellvärda.
Om funktionen $f(z)$ är ett polynom skriver vi $p(z)$ istället.
Ett nödvändigt villkor för att funktionen f skall vara *analytisk* är **Cauchy–Riemanns differentialekvationer** (CR's DE, eller kort bara CR)

$$u_x = v_y \qquad \text{och} \qquad u_y = -\, v_x \ .$$

Här skriver vi enkelhets skull

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad , \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} \quad , \quad v_x = \frac{\partial v}{\partial x} \quad , \quad v_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad .$$

Kontrollera om CR gäller i följande fall:

1. $p(z) = (\, x + \mathrm{i}y\,)^2 = x^2 - y^2 + \mathrm{i}2xy = u + \mathrm{i}v\,.$

2. $p(z) = (\, x + \mathrm{i}y)^3 = \cdots = u + \mathrm{i}v\,.$

3. $p(x + \mathrm{i}y) = (\, x + \mathrm{i}y)^4 = \cdots = (x^4 + y^4 - 6x^2y^2) + \mathrm{i}4(x^3y - xy^3)\ .$

4. $f(z) = \dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{(\, x + \mathrm{i}y\,)} = \dfrac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \cdots$

5. $f(z) = 1/z^2 = 1/(\, x + \mathrm{i}y)^2 = \cdots$

6. $f(z) = \exp(\,-\,z^2) = \mathrm{e}^{\,-z^2} = \exp(\, y^2 - x^2 - \mathrm{i}2xy\,) = \{\text{minns Eulers formler}\} = \cdots$

7. $f(z) = \sin(z) = \sin(x + \mathrm{i}y) = \sin x \cos(\mathrm{i}y) + \cos x \sin(\mathrm{i}y) = \cdots = u + \mathrm{i}v$, där $\sin(\mathrm{i}y)$ och $\cos(\mathrm{i}y)$ också beräknas medelst Eulers formler (jämför nedan vid Obs). Här passar det att bruka sinus hyperbolicus och cosinus hyperbolicus.

8. Principalgrenen Log av den komplexvärda logarithmen definieras för det komplexa talet $z = x + \mathrm{i}y = r(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)$, där här $-\pi < \theta < \pi$, av

$$\operatorname{Log} z = \operatorname{Log}(r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \log r + \mathrm{i}\theta\,,$$

där log betyder ln, och om nu $x > 0$, så har vi $r^2 = x^2 + y^2$ och $\tan\theta = y/x$, varav vi lätt kan beräkna funktioner(na) u och v i höger halvplan, sådana att $\operatorname{Log} z = u(x, y) + \mathrm{i}v(x, y)$ där. Uppfyller de CR?

10*. Hur kontrollerar vi enklast att även $\cos z$ uppfyller CR, om vi vet att sinus gör det?

Obs. $\cos(\mathrm{i}y) = \cdots = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\mathrm{i}y} + \mathrm{e}^{-\,\mathrm{i}\mathrm{i}y}}{2} = \cdots$

11. För att öva på **andraderivator** anbefalles **Laplaces ekvation** $u_{xx} + u_{yy} = 0$,

som både u och v från ovan bör uppfylla. Här är $u_{xx} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ och $u_{yy} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$.